







*Written strictly in accordance with the New Syllabus for Higher  
Secondary and Multipurpose Schools for Class IX*

---

# **HIGHER SECONDARY ELECTIVE MATHEMATICS**

## **PART I**

BY

**SRI KESHAB CHANDRA NAG**

*Retired Headmaster Mitra Institution (Bhowanipur), Author of S. F. &  
H S Core Math Patanganst (VII, VIII), Modern Arithmetics (VII, VIII)  
in English, Core Ganit (IX-X), Studies in Core, Math. (English)  
Naba Patanganst (V, VI), S F Aschhak Ganit (IX-X),  
S F Adal Math, H S Elective Mathematics Parts II-III,  
&  
Helps to the Study of H S. Ele Math.*

**CALCUTTA BOOK HOUSE**

**1/1, Bankim Chatterjee Street, Calcutta-12**



**Published by**

**P. C. BHOWAL**

**1/1, Bankim Chatterjee Street**

**Calcutta-12.**

*May, 1958*

**Price Rupees 3'50 Only**

**Printed by**

**P. C. BHOWAL**

**Madan Moharaji (P.) Limited**

**1, Chatterjee Street Lane,**

**Calcutta-12.**

# MATHEMATICS

## ELECTIVE SUBJECT

### *Course for Class IX*

#### ALGEBRA :

The Remainder Theorem, Divisibility (factor theorem), Harder Factors, Laws of Indices (formal proofs for fractional and negative indices not being required); Surds; Involutions and Evolutions, Simple Simultaneous Equations and problems with two or more variables, Quadratic Equations; Graphical Solutions.

#### GEOMETRY :

To Prove :

In an obtuse-angled triangle, the square on the side subtending the obtuse angle is equal to the sum of the squares on the sides containing the obtuse angle together with twice the rectangle contained by one of those sides and the projection of the other side upon it.

In every triangle the square on the side subtending an acute angle is equal to the sum of the squares on the sides containing that angle diminished by twice the rectangle contained by one of those sides and the projection of the other side upon it,

If a straight line is drawn parallel to one side of a triangle the other two sides are divided proportionally and the converse.

If two triangles are equiangular, their corresponding sides are proportional and the converse.

If two triangles have one angle of the one equal to one of the other and the sides about these equal angles proportional the triangles are similar.

The internal bisector of an angle of a triangle divides the opposite side internally in the ratio of the sides containing the angle and likewise the external bisector externally.

If a perpendicular is drawn from the right angle of a right-angled triangle to the hypotenuse, the triangles on each side of the perpendicular are similar to the whole triangle and to one another.

The ratio of the areas of similar triangles is equal to the ratio of the squares on the corresponding sides.

## TRIGONOMETRY :

Measurement of angles in degrees, minutes, seconds and in radians. Definition of trigonometrical ratios of an acute angle. Trigonometrical ratios of the standard angles— $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ , (undefined values such as  $\tan 90^\circ$ ,  $\cot 0^\circ$  to be excluded), Simple identities connecting the ratios of an angle immediately derivable from a right-angled triangle. Trigonometrical ratios of complementary angles.

Easy problems on heights and distances reducible to the solution of right-angled triangles involving the standard angles above.

## CONTENTS ( गृहीत )

<i>Subject</i>	<i>Page</i>
<b>ALGEBRA</b>	
1. Involution	1
2. Harder Factors	9
3. Remainder Theorem & Divisibility (Factor Theorem)	26
4. Simultaneous Equations	39
5. Problems on Equations	57
6. Theory of Indies	76
7. Surds	97
8. Evolution ( Square & Cube root )	110
9. Quadratic Equation	134
10. Problems on Quadratic Equations	157
11. Graphs & Graphical solutions	167
<b>GEOMETRY</b>	
1. Projection & Theorems on Projection	1
2. Ratio & Proportion	9
3. Problems	18
4. Similar triangles	28
<b>TRIGONOMETRY</b>	
1. Measurement of Angles (Different Systems)	50
2. Trigonometrical Ratios	77
3. Identities	81
4. Trigonometrical Ratios of some Standard Angles	92
5. Elimination	100
6. Solution of Equations ( Simple )	103
7. Height and Distance	107
Answers	121
Appendix	131

## শুদ্ধিপত্র

### Algebra :

- 46      উদা. 18 তে  $xyz \sqrt{3600}$  স্থানে  $xyz = \sqrt{3600}$  হইবে ,  
60    ,,    উদা. 11 তে সবশেষে  $x - y$  স্থানে  $y - x$  হইবে ,  
104    ,,    উদা. 6 এর প্রথম হবে  $\sqrt{2}$  স্থানে  $\sqrt{3}$  হইবে ,  
106    ,,    উদা. 13 তে  $\sqrt{-13}$  স্থানে  $\sqrt{3} - 1$  হইবে ;  
117    ,,    উদা. 9 এ ভাজকে  $\frac{b^4}{8a^3}$  এর আগে  $+$  স্থানে  $-$  হইবে ,  
118    ,,    শেষে  $\left(x - \frac{1}{x} - 2\right)$  স্থানে  $\left(x - \frac{1}{x} - 2\right)^2$  হইবে ,  
158    ,,    6 লাইনে  $= 3$  স্থানে  $= 0$  হইবে ।

### Geometry :

- 29 পৃষ্ঠায় 10 লাইনে প্রথমেই  $\frac{AB}{DE}$  হইবে ,  
48    ,,    উদা. 4এ  $\triangle ADE$  স্থানে  $\triangle ADF$  হইবে ,  
129    ,,    2(iii) অঙ্কে উত্তরে  $5'$  স্থানে  $5''$  হইবে ,  
142    ,,    3 লাইনে  $AC$  স্থানে  $AD$  হইবে ।

# ALGEBRA (বীজগণিত)

## Involution (শক্তি-উন্নয়ন বা ঘাত নির্ণয়)

1. ঘাত বা শক্তি। কোন সংখ্যা বা রাশিকে এক বা একাধিক বার লইয়া গুণ করিলে যে গুণফল পাওয়া যায়, সেই গুণফলকে ঐ সংখ্যা বা রাশির ঘাত বা শক্তি (Power) বলে। যথা—

দৃষ্টান্ত (i) 3কে একবার লইলে গুণফল হয় 3; 3কে দুইবার লইয়া গুণ করিলে গুণফল হয়  $3 \times 3 = 9$ ; 3কে যে দুইবার লওয়া হইয়াছে, উহা বুঝাইবার জন্য  $3^2$  লেখা যায়। অত্বরূপে  $3^3$ এর অর্থ  $3 \times 3 \times 3 = 27$ ।

$$\begin{aligned} \text{দৃষ্টান্ত (ii)} \quad (a)^1 &= a \\ (a)^2 &= a \times a = a^2 \\ (a)^3 &= a \times a \times a = a^3, \dots \end{aligned}$$

উপরের দৃষ্টান্তগুলি হইতে বুঝা গেল যে, কোন সংখ্যাকে একবার লইয়া গুণ করিলে গুণফল সেই সংখ্যাই হয়, সুতরাং কোন সংখ্যার প্রথম ঘাত সেই সংখ্যাটিই হয়।  $(a)^2$  লেখা থাকিলে বুঝিতে হইবে  $a$  সংখ্যাটিকে দুইবার লইয়া গুণ করিতে অর্থাৎ উহার দ্বিঘাত নির্ণয় করিতে হইবে। অত্বরূপে  $(a)^3$  বলিলে  $a$ কে 3 বার লইয়া গুণফল বা  $a$ -র ত্রিঘাত নির্ণয় করিতে হইবে। যদি  $a$ কে  $n$  সংখ্যক বার লইয়া গুণ করা হয়, তবে সেই গুণফলকে  $a$ -র  $n$ -তম ঘাত বলে,  $(a)^n = a \times a \times a \times \dots \times n \text{ বার} = a^n$ ।

কোন সংখ্যা বা রাশির ঘাত বা শক্তি নির্ণয় করাকে উহার শক্তি-উন্নয়ন বা ঘাত নির্ণয় বা উদ্ঘাতন (Involution) বলে।

কোন সংখ্যা বা রাশিকে কয়বার লইয়া গুণ করিতে অর্থাৎ উহাকে কয়বার ঘাতে উন্নীত করিতে হইবে, তাহা যে সংখ্যা দ্বারা সূচিত হয়, তাহাকে ঘাতের সূচক (Index) বলে। যথা,  $(a)^3$  এর 3টিকে ঘাতের সূচক বলে। চিহ্ন 1-কে লিখিতে হয় না, সুতরাং  $a = (a)^1 = a$ ।

$(a)^m$  এর  $m$ -কে ঘাতের সূচক বুঝিবে।

কোন রাশিকে সূচকনির্দিষ্ট ঘাতে উন্নীত করিলে যে রাশিমালা পাওয়া যায় তাহাকে ঐ রাশির বিস্তৃতি (expansion) বলে।

২. গুণফলের চিহ্ন-বিষয়ক নিয়ম (Rule of signs) হইতে ভোমরা জান যে,—

(i) যে কোন সংখ্যার যুগ্ম ঘাত (even power) ধনাত্মক (positive) হইবে। যথা,

$$(+x)^2 = x \times x = x^2,$$

$$(-x)^2 = -x \times -x = x^2,$$

$$(-a)^4 = -a \times -a \times -a \times -a = a^4, \text{ ইত্যাদি।}$$

আর (ii) ঘাতটি যদি অযুগ্ম (odd) হয়, তবে সংখ্যাটি ধনাত্মক হইলে ঘাতটি ধনাত্মক হইবে, এবং সংখ্যাটি ঋণাত্মক হইলে ঘাতটিও ঋণাত্মক হইবে। অতএব, অযুগ্ম ঘাতের চিহ্ন সংখ্যাটির চিহ্নবিশিষ্ট হইয়া থাকে। যথা,

$$(+3)^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27,$$

$$(-3a)^3 = -3a \times -3a \times -3a = -27a^3,$$

$$(-x)^5 = -x \times -x \times -x \times -x \times -x = -x^5, \text{ ইত্যাদি।}$$

৩. ঘাত নির্ণয়। উপরের দৃষ্টান্তগুলি হইতে একপদীয় রাশির ঘাত নির্ণয়ের নিয়ম হইল :—

(i) প্রদত্ত পদের সহগটিকে নির্দিষ্ট ঘাতে উন্নীত করিয়া তাহার পূর্বে নিয়মামুসারে ধনাত্মক বা ঋণাত্মক চিহ্ন দিবে।

(ii) তারপর পদটির প্রত্যেক উৎপাদকের সূচককে যে ঘাতে উন্নীত করিতে হইবে তাহার সূচক দ্বারা গুণ করিয়া বসাইবে।

$$\text{উদা. 1. } (2a^2)^4 = 2^4 \cdot (a^2)^4 = 16a^8,$$

$$(-2a^3b)^3 = (-2)^3 \cdot (a^3)^3 \cdot (b)^3 = -8a^9b^3,$$

$$(-3x^2y^3)^3 = (-3)^3 \cdot (x^2)^3 \cdot (y^3)^3 = -27x^6y^9,$$

$$\left(\frac{2ab^2}{5x^3y^2}\right)^3 = \frac{8a^3b^6}{125x^9y^6}.$$

4. রাশির ঘাত নির্ণয়। গুণন প্রক্রিয়া হইতে দেখা যায় যে,

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b) \times (a+b) = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\ (a-b)^4 &= a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \\ (a-b)^5 &= a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5\end{aligned}$$

উপরের দৃষ্টান্তগুলি হইতে বিপদ রাশির ঘাত নির্ণয়ের অল্প নিয়মিষ্ঠ নিয়ম করা যায়—

মনে কর, রাশির প্রথম পদ  $a$  এবং দ্বিতীয় পদ  $b$  দেওয়া আছে।

(i) বিপদ রাশিকে কোন ঘাতে উন্নীত করিলে লব্ধরাশিমানার পদসংখ্যা উহার ঘাত-সূচক সংখ্যা অপেক্ষা এক বেশী হইবে। যথা, দ্বিঘাতের বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা 3, ত্রিঘাতের বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা 4, ইত্যাদি।

(ii) বিপদ রাশিটির ঘাতে যে সূচক আছে, উহার প্রথম পদ  $a$ -কে এবং দ্বিতীয় পদ  $b$ -কে সেই ঘাতবিশিষ্ট করিলে বিস্তৃতির যথাক্রমে প্রথম ও শেষ পদ হইবে। যথা,  $(a+b)^5$  এর বিস্তৃতির প্রথম পদ  $a^5$  এবং শেষ পদ  $b^5$ ।

(iii) বিস্তৃতির দ্বিতীয়, তৃতীয় প্রভৃতি অন্ত্য যে কোন পদে  $a$ -র ঘাত উহার ঠিক পূর্ববর্তী পদের  $a$ -র ঘাত অপেক্ষা এক কম এবং  $b$ -র ঘাত পূর্ব পদটির  $b$ -র ঘাত অপেক্ষা এক বেশী হইবে।

(iv) বিস্তৃতির দ্বিতীয়, তৃতীয় প্রভৃতি যে কোন পদের সাংখ্য-সহগ নির্ণয় নিয়ম এই যে, যে পদের সহগ নির্ণয় করিতে হইবে তাহার ঠিক পূর্ববর্তী পদের সহগের সহিত  $a$ -র ঘাতের সূচকের গুণফলকে পূর্বে যতগুলি পদ আছে সেই পদসংখ্যা দ্বারা ভাগ করিলে লব্ধ ভাগফল হইবে নির্ণয়ের সহগ।

(v)  $a+b$  এবং  $a-b$  এইরূপ রাশিদ্বয়কে একই ঘাতে উন্নীত করিলে উভাদের দুইটি বিস্তৃতির পার্থক্য এই হয় যে, প্রথম বিস্তৃতির সব পদই ধনাত্মক হয়, কিন্তু দ্বিতীয় বিস্তৃতির প্রথম পদ ঋণাত্মক, দ্বিতীয় পদ ধনাত্মক।



একান্তরভাবে পদগুলি ধনাত্মক ও ঋণাত্মক হইয়া থাকে। পূর্ব পৃষ্ঠার দৃষ্টান্তগুলি দেখ।

(vi) যে কোন বিস্তৃতিতে প্রথম ও শেষ পদ হইতে সমদূরবর্তী পদদ্বয়ের সাংখ্য-সহগ দুইটি সমান হয়।

নিম্নের উদাহরণগুলিতে পূর্বোক্ত নিয়মগুলি মিলাইয়া লও।

### উদাহরণমালা 1

উদা. 1. Expand  $(a+b)^6$ .

এখানে ঘাতের সূচক 6, সুতরাং বিস্তৃতির মোট পদসংখ্যা হইবে 7, বিস্তৃতির প্রথম পদ হইবে  $a^6$ .

উহার দ্বিতীয় পদের সহগ নির্ণয়ের জন্ত প্রথমে পূর্বপদ  $a^6$ -এর সূচক 6 ও সহগ 1-এর গুণফল 6কে পূর্বে 1টি পদ থাকায় 1 দ্বারা ভাগ করিয়া হইল 6.

সুতরাং দ্বিতীয় পদের সাংখ্য-সহগ 6 হইবে। অতএব, বিস্তৃতির দ্বিতীয় পদ হইবে  $6a^5b$ . অনুরূপে,

$$\text{তৃতীয় পদ হইবে } \frac{6 \times 5}{2} a^4 b^2 = 15a^4 b^2$$

[ আগে 2টি পদ থাকায় 2 দিয়া ভাগ হইল ]

$$\text{চতুর্থ পদ} = \frac{15 \times 4}{3} a^3 b^3 = 20a^3 b^3$$

[ আগে 3টি পদ থাকায় 3 দিয়া ভাগ হইল ]

$$\text{পঞ্চম পদ} = \frac{20 \times 3}{4} a^2 b^4 = 15a^2 b^4$$

$$\text{ষষ্ঠ পদ} = \frac{15 \times 2}{5} a b^5 = 6ab^5$$

$$\text{সপ্তম বা শেষ পদ} = \frac{6 \times 1}{6} b^6 = b^6.$$

$$\therefore (a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$$

[ **উদ্ভেদ্য :** পূর্বে বলা হইয়াছে যে, কোন বিস্তৃতিতে প্রথম ও শেষ পদ হইতে সমদূরবর্তী পদদ্বয়ের সাংখ্য-সহগ দুইটি সমান হয়। উপরের উদাহরণে চতুর্থ পদের পূর্বে 3টি পদ হইয়াছে এবং উহার পরে 3টি পদ হইবে; সুতরাং চতুর্থ পদটি নির্ণয় করার পর উহার পরবর্তী পদ তিনটি সহজেই উক্ত নিয়মামুসারে নির্ণয় করা যায়। এখানে পঞ্চম পদের সহগ আর কবিতা নির্ণয় না করিয়া সহজেই ধরা যায় যে উহার সাংখ্য-সহগ তৃতীয় পদের সাংখ্য-সহগের সমান হইবে। ]

উদা. 2.  $(x-y)^7$  এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

এখানে বিস্তৃতির মোট পদসংখ্যা = 8.

অতএব, বিস্তৃতির প্রথম পদ =  $x^7$

$$\text{দ্বিতীয় পদ} = -\frac{7 \times 1}{1} x^6 y = -7x^6 y$$

$$\text{তৃতীয় পদ} = \frac{7 \times 6}{2} x^5 y^2 = 21x^5 y^2$$

$$\text{চতুর্থ পদ} = -\frac{7 \times 6 \times 5}{3!} x^4 y^3 = -35x^4 y^3$$

$$\text{পঞ্চম পদ} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{4!} x^3 y^4 = 35x^3 y^4$$

$$\text{ষষ্ঠ পদ} = -\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{5!} x^2 y^5 = -21x^2 y^5$$

$$\text{সপ্তম পদ} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{6!} x y^6 = 7x y^6$$

$$\text{শেষ পদ} = -\frac{7 \times 1}{1} y^7 = -y^7$$

$$\therefore (x-y)^7 = x^7 - 7x^6 y + 21x^5 y^2 - 35x^4 y^3 + 35x^3 y^4 - 21x^2 y^5 + 7x y^6 - y^7.$$

উদা. 3.  $(2a+b)^5$  এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

এখানে বিস্তৃতির মোট পদসংখ্যা হইবে 6.

$$\text{বিস্তৃতির প্রথম পদ} = (2a)^5 = 32a^5$$

$$\text{দ্বিতীয় পদ} = 5 \cdot (2a)^4 b = 80a^4 b$$

$$\text{তৃতীয় পদ} = \frac{5 \times 4}{2} (2a)^3 b^2 = 80a^3 b^2$$

$$\text{চতুর্থ পদ} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3!} (2a)^2 b^3 = 40a^2 b^3$$

$$\text{পঞ্চম পদ} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{4!} (2a) b^4 = 10ab^4$$

$$\text{ষষ্ঠ পদ বা শেষ পদ} = \frac{5 \times 1}{1} b^5 = b^5$$

$$\therefore (2a+b)^5 = 32a^5 + 80a^4 b + 80a^3 b^2 + 40a^2 b^3 + 10ab^4 + b^5.$$

উদা. 4.  $(1-x)^6$  এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

এখানে বিস্তৃতিতে মোট 7টি পদ থাকিবে।

$$\text{বিস্তৃতির প্রথম পদ} = (1)^6 = 1$$

$$\text{দ্বিতীয় পদ} = -6(1)^5 \cdot x = -6x$$

$$\text{তৃতীয় পদ} = \frac{6 \times 5}{2} (1)^4 \cdot x^2 = 15x^2$$

$$\text{চতুর্থ পদ} = -\frac{6 \times 5 \times 4}{3!} (1)^3 \cdot x^3 = -20x^3$$

এখানে পরবর্তী তিনটি পদের সাংখ্য-সহগ হইবে যথাক্রমে তৃতীয়, দ্বিতীয় প্রথম পদের সাংখ্য-সহগের সমান।

∴ পরবর্তী পদত্রয় হইবে  $15x^4$ ,  $-6x^5$  এবং  $x^6$ .

$$\therefore (1-x)^6 = 1 - 6x + 15x^2 - 20x^3 + 15x^4 - 6x^5 + x^6.$$

উদা. 5.  $(x^2 - 2)^4$  এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}(x^2 - 2)^4 &= (x^2)^4 - 4 \times_1^1 (x^2)^3 \cdot 2 + 6 \times_2^2 (x^2)^2 \cdot (2)^2 \\ &\quad - 4 \times_3^3 (x^2) \cdot (2)^3 + 4 \times_4^1 (2)^4 \\ &= x^8 - 8x^6 + 24x^4 - 32x^2 + 16.\end{aligned}$$

উদা. 6.  $(2a - 3b)^5$  এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

এখানে বিস্তৃতির মোট পদসংখ্যা = 6

$$\text{বিস্তৃতির প্রথম পদ} = (2a)^5 = 32a^5$$

$$\text{দ্বিতীয় পদ} = -5(2a)^4(3b) = -240a^4b$$

$$\text{তৃতীয় পদ} = 10 \times_2^2 (2a)^3(3b)^2 = 10(2a)^3(3b)^2 = 720a^3b^2$$

$$\text{চতুর্থ পদ} = -10(2a)^2(3b)^3 = -1080a^2b^3$$

$$\text{পঞ্চম পদ} = 5(2a)(3b)^4 = 810ab^4$$

$$\text{শেষ পদ} = -(3b)^5 = -243b^5$$

$$\therefore (2a - 3b)^5 = 32a^5 - 240a^4b + 720a^3b^2 - 1080a^2b^3 + 810ab^4 - 243b^5.$$

[ জটিল্য : বিস্তৃতির প্রথম ও শেষ পদ হইতে সমদূরবর্তী পদগুলির সাংখ্য-সহগ সমান হয় বলিয়া উপরের উদাহরণে প্রথম তিনটি পদের সাংখ্য-সহগ দেখিয়া চতুর্থ, পঞ্চম ও ষষ্ঠ পদের সাংখ্য-সহগ লেখা হইয়াছে। ]

উদা. 7.  $(a+b)^5 - (a-b)^5$  কে সরল কর।

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= (a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5) \\ &\quad - (a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5) \\ &= 10a^4b + 20a^2b^3 + 2b^5.\end{aligned}$$

উদা. 8.  $a = 3$  হইলে,  $a^6 - 6a^5 + 15a^4 - 20a^3 + 15a^2 - 6a - 63$  এর মান কত হইবে?

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= (a^6 - 6a^5 + 15a^4 - 20a^3 + 15a^2 - 6a + 1) - 64 \\ &= (a-1)^6 - 64 = (3-1)^6 - 64 \\ &= (2)^6 - 64 = 64 - 64 = 0.\end{aligned}$$

[ এখানে পর পর পদগুলির সাংখ্য-সহগ দেখিয়া স্থির করা যায় যে প্রথম ছয় পদের সহিত সপ্তম পদ 1 লইলে 7টি পদ মিলিয়া  $(a-1)^6$  এর বিস্তৃতির সমান হইবে।  $\therefore -63=1-64$  এইরূপ ধরা হইয়াছে। ]

উদা. 9.  $a = \sqrt{3} - 2$  হইলে  $a^4 + 8a^3 + 24a^2 + 32a + 18$  এর মান নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= (a)^4 + 4.a^3.2 + 6.a^2(2)^2 + 4.a.(2)^3 + (2)^4 + 2 \\ &= (a+2)^4 + 2 = (\sqrt{3} - 2 + 2)^4 + 2 = (\sqrt{3})^4 + 2 \\ &= (3)^2 + 2 = 9 + 2 = 11.\end{aligned}$$

উদা. 10.  $(x+y)^5$  এর বিস্তৃতিতে সাংখ্য-সহগগুলির সমষ্টি কত ?  
বিস্তৃতির মোট পদসংখ্যা = 6

$$\begin{aligned}\therefore (x+y)^5 &= x^5 + 5x^4y + \frac{5 \times 4}{2} x^3y^2 + \frac{10 \times 3}{3} x^2y^3 \\ &\quad + \frac{10 \times 2}{4} xy^4 + y^5,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{পদগুলির সাংখ্য-সহগসমূহের যোগফল} \\ &= 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32.\end{aligned}$$

[ অত্র প্রণালী পরিশিষ্টে দেখ ]

উদা. 11.  $(a+b+2)^4$  এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}(a+b+2)^4 &= \{(a+b)+2\}^4 \\ &= (a+b)^4 + 4(a+b)^3.2 + 6(a+b)^2.2^2 + 4(a+b).2^3 + (2)^4 \\ &= (a+b)^4 + 8(a+b)^3 + 24(a+b)^2 + 32(a+b) + 16 \\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 + 8(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) \\ &\quad + 24(a^2 + 2ab + b^2) + 32a + 32b + 16 \\ &= a^4 + 4a^3b + 8a^3 + 6a^2b^2 + 24a^2b + 24a^2 + 4ab^3 + 24ab^2 \\ &\quad + 48ab + 24b^2 + 8b^3 + b^4 + 32a + 32b + 16.\end{aligned}$$

### Exercise 1

Raise to the required power :—

1. (i)  $(-2a^3b^2)^5$

(ii)  $(-3x^2y^3)^6$

✓ (iii)  $\left(-\frac{ab^2}{2x^2y}\right)^5$

(iv)  $(a+b)^5$

Expand :—

2.  $(a+1)^6$     3.  $(x+y)^7$     ✕ 4.  $(1+2a)^4$     5.  $(a-2)^5$   
 6.  $(x-y)^5$     7.  $(x-1)^6$     8.  $(2a-1)^5$     '    9.  $(3-c)^6$     10.  $(2a+b)^5$     ✕ 11.  $(2x-3y)^5$   
 ✕ 12.  $(3a+2b)^5$     13.  $(a+1)^8$     14.  $(x-1)^9$   
 15.  $(a^2+1)^6$     16.  $(x^2+1)^5$     ✕ 17.  $(a^2-b^2)^4$   
 18.  $(1-a^2)^6$     ✕ 19.  $(x-y+z)^3$     ✕ 20.  $(a+b-2)^4$ .

Find the sum of the numerical coefficients of the terms in the following expansions :—

21.  $(a+b)^6$     22.  $(x+y)^5$     ✕ 23.  $(x+b)^7$     ✕ 24.  $(a+b)^8$   
 24 ✕ (a).  $(2a-3b)^7$  [ পরিশিষ্টে দেখ ]

Find the value of :—

- ✕ 25.  $a^6+6a^5+15a^4+20a^3+15a^2+6a-31$ , when  $a=-3$ .  
 ✕ 26.  $x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x$ , when  $x=2$ .  
 ✕ 27.  $x^4-12x^3+54x^2-108x+81$ , when  $x=3$ .  
 ✕ 28.  $16a^4+32a^3+24a^2+8a-80$ , when  $a=-2$ .  
 ✕ 29.  $x^5-5x^4y+10x^3y^2-10x^2y^3+5xy^4-y^5$ , if  $x=2$ ,  $y=-1$ .  
 ✕ 30.  $x^4-4x^3+6x^2-4x-2$ , when  $x=\sqrt{2}+1$ .  
 ✕ 31.  $a^6+6a^5+15a^4+20a^3+15a^2+6a$ , when  $a=\sqrt[3]{3}-1$ .

Simplify :—

32.  $(x+y)^5-(x-y)^5$     33.  $(1+x)^6-(x-1)^6$   
 34.  $(a+b)^7+(a-b)^7$     ✕ 35.  $(x+a)^6-(x-a)^6$ .
-

## Harder Factors ( উৎপাদক নির্ণয় )

### উদাহরণমালা ২

৫.  $a^2 - b^2$  আকারবিশিষ্ট রাশির উৎপাদক নির্ণয়।

উদা. ১. Factorize  $a^4 + 4b^4$ . [ C. U. 1922 ]

[ দ্রষ্টব্য : এখানে অঙ্কটিতে  $a^4$  একটি পূর্ণবর্গ, কারণ উহা  $(a^2)^2$  এবং  $4b^4$  একটি পূর্ণবর্গ, কারণ উহা  $(2b^2)^2$ , কিন্তু মধ্যের চিহ্নটি +, সুতরাং ইহা  $a^2 - b^2$  এর আকারে নাই। এখন দেখ, কি ভাবে দুই পাশে পূর্ণবর্গ সংখ্যা এবং মধ্য ' - ' চিহ্ন দিয়া অঙ্কটিকে সাজান হইল। ]

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= (a^2)^2 + (2b^2)^2 + 2a^2 \cdot 2b^2 - 4a^2b^2 \\ &= (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2 = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab).\end{aligned}$$

উদা. ২. Factorize  $a^8 + a^4 + 1$ .

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= (a^4)^2 + 2a^4 \cdot 1 + (1)^2 - a^4 = (a^4 + 1)^2 - (a^2)^2 \\ &= (a^4 + a^2 + 1)(a^4 - a^2 + 1) = \{(a^2)^2 + 2 \cdot a^2 \cdot 1 + (1)^2 - a^2\} \\ &\times (a^4 - a^2 + 1) = \{(a^2 + 1)^2 - (a)^2\}(a^4 - a^2 + 1) \\ &= (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)(a^4 - a^2 + 1).\end{aligned}$$

উদা. ৩. Factorize  $a^4 - 23a^2b^2 + b^4$ .

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= (a^2)^2 + 2a^2 \cdot b^2 + (b^2)^2 - 25a^2b^2 \\ &= (a^2 + b^2)^2 - (5ab)^2 = (a^2 + 5ab + b^2)(a^2 - 5ab + b^2).\end{aligned}$$

উদা. ৪. Factorize  $4a^2 + b^2 - c^2 - d^2 + 4ab + 2cd$ .

[ D. B. 1923 ]

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= (4a^2 + b^2 + 4ab) - (c^2 + d^2 - 2cd) \\ &= (2a + b)^2 - (c - d)^2 = (2a + b + c - d)(2a + b - c + d).\end{aligned}$$

উদা. ৫. Factorize  $(a^2 - b^2)(x^2 - y^2) + 4abxy$ .

[ P. U. '25, '33 ]

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= a^2x^2 - a^2y^2 - b^2x^2 + b^2y^2 + 2abxy + 2abxy \\ &= (a^2x^2 + b^2y^2 + 2abxy) - (a^2y^2 + b^2x^2 - 2abxy) \\ &= (ax + by)^2 - (ay - bx)^2 \\ &= (ax + by + ay - bx)(ax + by - ay + bx).\end{aligned}$$

উদা. 6. Factorize  $a^3 - b^3 - c^3 - 2bc + a - b - c$ .

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= a^3 - (b^3 + c^3 + 2bc) + a - b - c \\ &= (a)^3 - (b+c)^3 + (a-b-c) \\ &= (a+b+c)(a-b-c) + (a-b-c) \\ &= (a-b-c)(a+b+c+1).\end{aligned}$$

উদা. 7. Factorize  $4x^4 + 1$  and hence find the two factors of 40001.

$$\begin{aligned}4x^4 + 1 &= (2x^2)^2 + (1)^2 + 2 \cdot 2x^2 \cdot 1 - 4x^2 = (2x^2 + 1)^2 - (2x)^2 \\ &= (2x^2 + 2x + 1)(2x^2 - 2x + 1).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{এক্ষণে, } 40001 &= 40000 + 1 = 4 \times 10000 + 1 \\ &= 4 \times 10^4 + 1 = 4x^4 + 1 \text{ [ } 10 = x \text{ ধরিয়া ]} \\ &= (2x^2 + 2x + 1)(2x^2 - 2x + 1) \\ &= (2 \times 10^2 + 2 \times 10 + 1) \times (2 \times 10^2 - 2 \times 10 + 1) \\ &= (200 + 20 + 1)(200 - 20 + 1) = 221 \times 181.\end{aligned}$$

উদা. 8. Resolve into factors  $3a^2 - b^2 - c^2 - 2ab - 2bc - 2ca$ .

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= 4a^2 - a^2 - b^2 - c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \\ &= 4a^2 - (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca) \\ &= (2a)^2 - (a+b+c)^2 \\ &= (2a+a+b+c)(2a-a-b-c) \\ &= (3a+b+c)(a-b-c).\end{aligned}$$

উদা. 9. Resolve into factors

$$2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4.$$

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= 4a^2b^2 - 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4 \\ &= 4a^2b^2 - (a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2) \\ &= (2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 \\ &= (2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2) \\ &= \{(a+b)^2 - (c)^2\} \{c^2 - (a^2 + b^2 - 2ab)\} \\ &= (a+b+c)(a+b-c) \{c^2 - (a-b)^2\} \\ &= (a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b).\end{aligned}$$

6.  $a^3 \pm b^3$  আকারবিশিষ্ট রাশির উৎপাদক নির্ণয়।

উদা. 10. Resolve into factors  $a^6 - b^6$ .

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= (a^3)^2 - (b^3)^2 = (a^3 + b^3)(a^3 - b^3) \\ &= (a+b)(a^2 - ab + b^2)(a-b)(a^2 + ab + b^2).\end{aligned}$$

উদা. 11. Factorize  $8(a+b)^3 - c^3$ .

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= \{2(a+b)\}^3 - (c)^3 = (2a+2b)^3 - (c)^3 \\ &= (2a+2b-c)\{(2a+2b)^2 + (2a+2b)c + c^2\} \\ &= (2a+2b-c)(4a^2 + 4b^2 + 8ab + 2ac + 2bc + c^2).\end{aligned}$$

উদা. 12. Divide  $a^6 + \frac{b^6}{27}$  by  $a^2 + ab + \frac{b^2}{3}$ . [C. U. 1930]

$$\begin{aligned}a^6 + \frac{b^6}{27} &= (a^2)^3 + \left(\frac{b^2}{3}\right)^3 = \left(a^2 + \frac{b^2}{3}\right)\left(a^4 - a^2 \frac{b^2}{3} + \frac{b^4}{9}\right) \\ &= \left(a^2 + \frac{b^2}{3}\right)\left\{(a^2)^2 + 2a^2 \cdot \frac{b^2}{3} + \left(\frac{b^2}{3}\right)^2 - a^2 \frac{b^2}{3}\right\} \\ &= \left(a^2 + \frac{b^2}{3}\right)\left\{(a^2 + \frac{b^2}{3})^2 - (ab)^2\right\} \\ &= \left(a^2 + \frac{b^2}{3}\right)\left(a^2 + ab + \frac{b^2}{3}\right)\left(a^2 - ab + \frac{b^2}{3}\right) \\ \therefore \text{নির্ণেয় ভাগফল} &= \frac{\left(a^2 + \frac{b^2}{3}\right)\left(a^2 + ab + \frac{b^2}{3}\right)\left(a^2 - ab + \frac{b^2}{3}\right)}{\left(a^2 + ab + \frac{b^2}{3}\right)} \\ &= \left(a^2 + \frac{b^2}{3}\right)\left(a^2 - ab + \frac{b^2}{3}\right)\end{aligned}$$

উদা. 13. Show that  $(ax+by)^3 + (bx+ay)^3$  is divisible by  $a+b$  and also by  $x+y$ . [C. U. '21, '26]

$$\begin{aligned}&(ax+by)^3 + (bx+ay)^3 \\ &= (ax+by+bx+ay)\{(ax+by)^2 - (ax+by)(bx+ay) + (bx+ay)^2\} \\ &= \{a(x+y) + b(x+y)\}\{(ax+by)^2 - (ax+by)(bx+ay) + (bx+ay)^2\} \\ &= (a+b)(x+y)\{(ax+by)^2 - (ax+by)(bx+ay) + (bx+ay)^2\}.\end{aligned}$$



এক্ষেণে, যেহেতু  $a+b$  এবং  $x+y$  উভয়ই প্রদত্ত রাশির উৎপাদক,

$\therefore$  রাশিটি  $a+b$  এবং  $x+y$  দ্বারা বিভাজ্য।

উদা. 14. Factorize  $x^3 - y^3 + 3y^2 - 3y + 1$ .

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= x^3 - (y^3 - 3y^2 + 3y - 1) = (x)^3 - (y-1)^3 \\ &= (x-y+1)\{x^2 + x(y-1) + (y-1)^2\} \\ &= (x-y+1)(x^2 + xy - x + y^2 - 2y + 1) \\ &= (x-y+1)(x^2 + y^2 + 1 + xy - x - 2y).\end{aligned}$$

7.  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$  আকারবিশিষ্ট রাশির উৎপাদক নির্ণয়।

উদা. 15. Resolve into factors  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= (a+b)^3 - 3ab(a+b) + c^3 - 3abc \\ &= (a+b)^3 + (c)^3 - 3ab(a+b) - 3abc \\ &= (a+b+c)\{(a+b)^2 - (a+b)c + c^2\} - 3ab(a+b+c) \\ &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + 2ab - ac - bc + c^2 - 3ab) \\ &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc).\end{aligned}$$

উদা. 16. Resolve into factors  $8x^3 - y^3 + z^3 + 6xyz$ .

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= (2x)^3 + (-y)^3 + (z)^3 - 3(2x)(-y)(z) \\ &= (2x-y+z)\{(2x)^2 + (-y)^2 + (z)^2 - (2x)(-y) \\ &\quad - (-y)(z) - (z)(2x)\} \\ &= (2x-y+z)(4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + yz - 2xz).\end{aligned}$$

[ জটিল্য : সূত্র সাহায্যে সমাধান করা হইল। উদা. 15-এর মত পূর্ণ প্রণালীতে করাই ভাল। তোমরা প্ররূপ করিবে। ]

উদা. 17. Resolve into factors  $x^3 - y^3 - 1 - 3xy$ .

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= (x)^3 + (-y)^3 + (-1)^3 - 3(x)(-y)(-1) \\ &= (x-y-1)(x^2 + y^2 + 1 + xy - x - y).\end{aligned}$$

উদা. 18. Resolve into factors  $a^6 + 8a^3 + 27$ .

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= a^6 - a^3 + 27 + 9a^3 \\ &= (a^2)^3 + (-a)^3 + (3)^3 - 3.a^2.(-a).3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (a^2 - a + 3) \{ (a^2)^2 + (-a)^3 + (3)^2 - (a^2)(-a) - (a^3).3 \\
 &\quad - (-a).3 \} \\
 &= (a^2 - a + 3)(a^4 + a^3 + 9 + a^3 - 3a^2 + 3a) \\
 &= (a^2 - a + 3)(a^4 + a^3 - 2a^2 + 3a + 9).
 \end{aligned}$$

৪. বিবিধ রাশির উৎপাদক নির্ণয়।

উদা. ১৯. Resolve into factors  $x^2 + 4x - 21$ . [C. U. 1916]

[জট্টব্য : এই form-এ অঙ্ক থাকিলে কষিবার নিয়ম এই—এমন দুইটি সংখ্যা বাহির কর যাহাদের গুণফল  $-21$  (অর্থাৎ  $x$  বর্জিত পদ) এবং যোগফল  $+4$  (অর্থাৎ  $x$ -এর সহগ)। এখানে  $7$  ও  $-3$  সেই সংখ্যা দ্বয় যতরাং  $4x$  এর স্থানে  $7x$  এবং  $-3x$  লিখিবে।]

$$\begin{aligned}
 x^2 + 4x - 21 &= x^2 + 7x - 3x - 21 = x(x+7) - 3(x+7) \\
 &= (x+7)(x-3).
 \end{aligned}$$

উদা. ২০. Factorize  $6x^2 + x - 15$ . [C. U. 1936]

[জট্টব্য : এখানে  $x^2$ -এর সহগ  $6$ কে  $-15$  দিয়া গুণ করিয়া হইল  $-90$ ; এইবার এমন দুইটি সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাদের গুণফল  $-90$  এবং সমষ্টি  $+1$  (অর্থাৎ  $x$ -র সহগ)।]

$$\begin{aligned}
 \text{প্রদত্ত রাশি} &= 6x^2 + 10x - 9x - 15 = 2x(3x+5) - 3(3x+5) \\
 &= (3x+5)(2x-3).
 \end{aligned}$$

উদা. ২১. Factorize  $x^2 + x - (a+1)(a+2)$ .

[জট্টব্য : এখানে লক্ষ্য কর যে,  $(a+2)$  এবং  $-(a+1)$  এই দুইটির গুণফল  $-(a+1)(a+2)$  এবং যোগফল  $+1$  (অর্থাৎ  $x$ -এর সহগ); সুতরাং  $x$ -এর স্থানে  $(a+2)x - (a+1)x$  লিখিতে হইবে।]

$$\begin{aligned}
 \text{প্রদত্ত রাশি} &= x^2 + (a+2)x - (a+1)x - (a+1)(a+2) \\
 &= x(x+a+2) - (a+1)(x+a+2) \\
 &= (x+a+2)(x-a-1).
 \end{aligned}$$

উদা. ২২. Factorize  $x^2 - \left(a + \frac{1}{a}\right)x + 1$ .

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = x^2 - ax - \frac{x}{a} + 1 = x(x-a) - \frac{1}{a}(x-a) = (x-a)\left(x - \frac{1}{a}\right).$$

উদা. 23. Factorize  $(x^2 - 6x)^2 - 8(x^2 - 6x + 8) - 64$ .

[B. U. '26]

প্রদত্ত রাশি  $= a^2 - 8(a+8) - 64$ . [  $x^2 - 6x = a$  ধরিয়া ]

$$= a^2 - 8a - 64 - 64 = a^2 - 8a - 128$$

$$= a^2 - 16a + 8a - 128$$

$$= a(a - 16) + 8(a - 16) = (a - 16)(a + 8)$$

$$= (x^2 - 6x - 16)(x^2 - 6x + 8) \quad [a\text{-র মান বসাইয়া}]$$

$$= (x^2 - 8x + 2x - 16)(x^2 - 4x - 2x + 8)$$

$$= \{x(x - 8) + 2(x - 8)\}\{x(x - 4) - 2(x - 4)\}$$

$$= (x - 8)(x + 2)(x - 2)(x - 4).$$

উদা. 24. Factorize  $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$ .

[C. U. 1941; M. U. 1926]

প্রদত্ত রাশি  $= \{(x+1)(x+7)\}\{(x+3)(x+5)\} + 15$

$$= (x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 15) + 15$$

$$= (a + 7)(a + 15) + 15 \quad [x^2 + 8x = a \text{ ধরিয়া}]$$

$$= a^2 + 22a + 105 + 15$$

$$= a^2 + 22a + 120 = a^2 + 12a + 10a + 120$$

$$= a(a + 12) + 10(a + 12)$$

$$= (a + 10)(a + 12) = (x^2 + 8x + 10)(x^2 + 8x + 12)$$

$$= (x^2 + 8x + 10)(x^2 + 6x + 2x + 12)$$

$$= (x^2 + 8x + 10)\{x(x + 6) + 2(x + 6)\}$$

$$= (x^2 + 8x + 10)(x + 6)(x + 2).$$

[ দ্রষ্টব্য : এখানে বন্ধনী চারটি একত্রে গুণ না করিয়া দুইটি দুইটি বন্ধনী গুণ করা হইয়াছে, কিন্তু যে-কোন দুইটি বন্ধনৌ লওয়া হয় নাই। এমন দুই দুইটি বন্ধনৌ লইয়া দুই দল করিতে হইবে যেন প্রথম দলের বন্ধনৌ দুইটির যোগফল, অত্র দলের বন্ধনৌ দুইটির যোগফলের সমান হয়। ]

উদা. 25. Factorize  $(x+1)(x+3)(x-4)(x-6)+24$ .

[D. B. '22]

প্রদত্ত রাশি  $= (x+1)(x-4)(x+3)(x-6)+24$

$$= (x^2 - 3x - 4)(x^2 - 3x - 18) + 24$$

$$= (a - 4)(a - 18) + 24 \quad [x^2 - 3x = a \text{ মনে কর}]$$

$$= a^2 - 22a + 96 = a^2 - 16a - 6a + 96 = a(a - 16) - 6(a - 16)$$

$$= (a - 6)(a - 16) = (x^2 - 3x - 6)(x^2 - 3x - 16).$$

9. পরীক্ষা দ্বারা উৎপাদক নির্ণয়।

উদা. 26. Factorize  $x^3 - 3x + 2$ . [C. U. 1930 ; D. B. 1929]

[প্রথমে দেখ,  $x$ -এর মান কত ধরিলে প্রদত্ত রাশিটির মান শূন্য  
এখানে যদি  $x$ -এর মান  $+1$  ধরি তবে রাশিটির মান 0 হয়, সুতরাং উহার  
একটি factor হইবে  $x-1$ । এইরূপে যদি  $x$ -এর মান  $-1$  ধরিয়া রাশিটির মান  
শূন্য হইত, তবে  $x+1$  ইহার একটি factor হইত।]

$$\begin{aligned} x^3 - 3x + 2 &= x^3 - x^2 + x^2 - x - 2x + 2 \\ &= x^2(x-1) + x(x-1) - 2(x-1) \\ &= (x-1)(x^2 + x - 2) = (x-1)(x^2 + 2x - x - 2) \\ &= (x-1)\{x(x+2) - 1(x+2)\} \\ &= (x-1)(x+2)(x-1) = (x-1)^2(x+2). \end{aligned}$$

[N. B. এখানে প্রথমে ঠিক হইল যে  $x$ -এর মান  $+1$  হইলে রাশিটির  
মান 0 হয়, সুতরাং উহার একটি উৎপাদক  $x-1$ । এইবার রাশিটি কি ভাবে  
ভাঙ্গিয়া সাজাইতে হইবে তাহা স্থির করিবার সময় বালকেরা প্রায়ই ভুল  
করে। তোমরা ঐ  $x-1$  দ্বারা রাশিটিকে ভাগ করিয়া ভাগফল কি হয়  
দেখ। এখানে ভাগফল হইবে  $x^2 + x - 2$  এইবার ঐ ভাগফলের প্রত্যেক  
পদটির সহিত ঐ factor  $(x-1)$ -কে গুণের আকারে লিখিলেই রাশিটির  
সমান হইবে।]

উদা. 27. Factorize  $x^3 - x^2 - 7x - 2$ .

এখানে  $x$ -এর মান  $-2$  হইলে রাশিটির মান শূন্য হয়, সুতরাং  $x+2$  উহার  
একটি গুণনীয়ক (factor)।

$$\begin{aligned} \text{অতএব, প্রদত্ত রাশিটি} &= x^3 + 2x^2 - 3x^2 - 6x - x - 2 \\ &= x^2(x+2) - 3x(x+2) - 1(x+2) = (x+2)(x^2 - 3x - 1). \end{aligned}$$

উদা. 28. Factorize  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ . [A. U. 1921]

এখানে  $x$ -এর মান 1 হইলে রাশিটির মান 0 হইবে।

∴  $x-1$  উহার একটি factor.

$$\begin{aligned} \therefore x^3 - 6x^2 + 11x - 6 &= x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6 \\ &= x^2(x-1) - 5x(x-1) + 6(x-1) \\ &= (x-1)(x^2 - 5x + 6) = (x-1)(x^2 - 3x - 2x + 6) \\ &= (x-1)\{x(x-3) - 2(x-3)\} = (x-1)(x-3)(x-2). \end{aligned}$$

উদা. 29. Factorize  $8a^3 + 4a - 3$ .

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= 8a^3 - 1 + 4a - 2 = \{(2a)^3 - (1)^3\} + 2(2a - 1) \\ &= (2a - 1)(4a^2 + 2a + 1) + 2(2a - 1) \\ &= (2a - 1)(4a^2 + 2a + 1 + 2) = (2a - 1)(4a^2 + 2a + 3)\end{aligned}$$

উদা. 30. Factorize  $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$ .

[এখানে পরীক্ষা দ্বারা দেখা যায় যে  $x$ -এর মান 1, -1, -2, 3 যে কোন একটি বসাইলে প্রদত্ত রাশির মান শূন্য হয়, সুতরাং  $x-1$ ,  $x+1$ ,  $x+2$ ,  $x-3$  এই রাশির এক একটি উৎপাদক হইবে। এখানে রাশিটির পদগুলিকে এরূপে সাজাও যেন উহাদের দুই দুইটির মধ্যে  $x+1$  উৎপাদক থাকে।]

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= x^4 + x^3 - 2x^3 - 2x^2 - 5x^2 - 5x + 6x + 6 \\ &= x^3(x+1) - 2x^2(x+1) - 5x(x+1) + 6(x+1) \\ &= (x+1)(x^3 - 2x^2 - 5x + 6)\end{aligned}$$

[একপে দ্বিতীয় উৎপাদকটির  $(x-1)$  উৎপাদক হয় এরূপে সাজাও]

$$\begin{aligned}&= (x+1)(x^3 - x^2 - x^2 + x - 6x + 6) \\ &= (x+1)\{x^2(x-1) - x(x-1) - 6(x-1)\} \\ &= (x+1)(x-1)(x^2 - x - 6)\end{aligned}$$

[তৃতীয় উৎপাদকটিকে এরূপে সাজাও যেন  $x+2$  একটি উৎপাদক হয়।]

$$\begin{aligned}&= (x+1)(x-1)(x^2 + 2x - 3x - 6) \\ &= (x+1)(x-1)(x+2)(x-3).\end{aligned}$$

10. আক্ষরিক অধঃক্রম অনুসারে সাজাইয়া সমাধান।

উদা. 31. Factorize  $a^2 - 2b^2 - 3c^2 + ab + 2ac + 7bc$ .

[রাশিমালাটির অন্তর্গত  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , অক্ষর তিনটির মধ্যে যে কোন একটি অক্ষরের ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে প্রথমে সাজাও।]

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= a^2 + ab + 2ac - 2b^2 + 7bc - 3c^2 \\ &= a^2 + (b+2c)a - (2b^2 - 7bc + 3c^2) \\ &= a^2 + (b+2c)a - (2b^2 - 6bc - bc + 3c^2) \\ &= a^2 + (b+2c)a - (2b-c)(b-3c) \\ &= a^2 + (2b-c)a - (b-3c)a - (2b-c)(b-3c) \\ &= a(a+2b-c) - (b-3c)(a+2b-c) \\ &= (a+2b-c)(a-b+3c).\end{aligned}$$

[ **জটব্য :** এখানে  $-(2b-c)(b-3c)$  কে একপ দুইটি রাশিতে বিভক্ত করা হইল যাহাদের যোগফল  $a$ -এর সহগের সমান অর্থাৎ  $b+2c$  এবং গুণফল  $-(2b-c)(b-3c)$  হয়। সেই রাশি দুইটি হইল  $(2b-c)$  এবং  $-(b-3c)$ । প্রদত্ত রাশিতে  $a^2$  এর যদি কোন সাংখ্য সহগ থাকিত, তবে প্রথমে  $-(2b-c)(b-3c)$  এর সহিত সেই সহগের গুণফলকে একপ দুই রাশিতে বিভক্ত করিতে হইত। ]

**উদা. 32.** Factorize  $a^2 - 4ab + 3b^2 - 4ac + 3bc$ .

$$\begin{aligned} \text{প্রদত্ত রাশি} &= (a^2 - 4ab + 3b^2) + ac - 3bc \\ &= (a^2 - ab - 3ab + 3b^2) + c(a - 3b) \\ &= (a - b)(a - 3b) + c(a - 3b) \\ &= (a - 3b)(a - b + c). \end{aligned}$$

[ **জটব্য :** এখানে প্রদত্ত রাশিতে যে .য পদ  $a$  ও  $b$  এর দুই মাত্রাবিশিষ্ট সেই পদগুলি একত্রে লইয়া একদল এবং অগ্রপদগুলি একত্রে লইয়া আর একদল করা হইয়াছে। ]

**উদা. 33** Resolve into factors  $x^4 + x^3 - 10x^2 + x + 1$

[ যে রাশির প্রথম ও শেষ হইতে সমদূরবর্তী পদদ্বয়ের সহগ সমান, তাহার উৎপাদক নির্ণয়ের সময় একপ পদদ্বয়কে একত্রে লইতে হইবে। ]

$$\begin{aligned} \text{প্রদত্ত রাশি} &= (x^4 + 1) + (x^3 + x) - 10x^2 \\ &= (x^2 + 1)^2 - 2x^2 + x(x^2 + 1) - 10x^2 = (x^2 + 1)^2 + x(x^2 + 1) - 12x^2 \\ &= x^2 + ax - 12x^2 [x^2 + 1 = x \text{ ধরিয়া}] = x^2 + 4ax - 3ax - 12x^2 \\ &= (x + 4a)(x - 3a) = (x^2 + 1 + 4a)(x^2 + 1 - 3a). \end{aligned}$$

১. **চক্রক্রম (Cyclic order) :** একটি চক্র বা বৃত্তের পরিধির উপর পদ পর  $a, b, c$  বসাইয়া যদি  $a$  হইতে আরম্ভ করিয়া ঘড়ির কাঁটা ঘে দিকে ঘোরে সেই-ক্রমে পড়ি যায়, তবে  $abc$  এই-ক্রমে অক্ষরগুলি পাওয়া যায়। একপ  $b$  হইতে আরম্ভ করিলে  $bca$  এবং  $c$  হইতে আরম্ভ করিলে  $cab$  ক্রমে পাওয়া যায়। এইকপ ক্রমকে চক্রক্রম বলা হয়।

চক্রক্রমে সাজান রাশির উৎপাদক নির্ণয়ের জ্ঞান প্রথমে রাশিটিকে যে কোন একটি অক্ষরের ( ধর  $a$  ) ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজাইবে। তারপর লব্ধ দুটি উৎপাদকের মধ্যে দেখিবে একটিকে  $b$ -এর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়। এইভাবে পর পর  $a, b, c$  এর ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজাইয়া উৎপাদক নির্ণয় করা সহজ হইবে। আর উত্তরটিকে চক্রক্রমে সাজাইয়া লিখিবে। মনে কর, উত্তর হইল  $(a-b)(b-c)(a-c)$ , উহা চক্রক্রমের আকারে না থাকায়, উহাকে চক্রক্রমের আকারে সাজাইয়া লেখা হয়। এখানে  $a$   $c$  চক্রক্রমে নাই,  $a-c$  কে  $-(c-a)$  লেখা যায় এবং তাহা চক্রক্রমের সহিত মিলিয়া যায়। সেজন্ত উত্তরটিকে  $-(a-b)(b-c)(c-a)$  লেখা হয়।

[ জ্যেষ্ঠ্য : চক্রক্রমের অঙ্কে  $a, b, c$ -এর পরিবর্তে  $x, y, z$  থাকিলেও ঐ নিয়মেই সমাধান করিবে।  $a^4(b^2 - c^2) + b^4(c^2 - a^2) + c^4(a^2 - b^2)$  এষ্ট রাশিটিব উৎপাদক নির্ণয়ের জ্ঞান উদা. 34-এ  $a, b, c$ -এর পরিবর্তে  $a^2, b^2, c^2$  বসাইয়া সমাধান করিবে। ]

### [ Factors of Cyclic order ]

উদা. 34. Factorize  $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$ .

[C. U. 1928, '40, '45; D. B. '24, G. U. '48]

$$\begin{aligned} \text{প্রদত্ত রাশি} &= a^2(b-c) + b^2c - ab^2 + ac^2 - bc^2 \\ &= a^2(b-c) - a(b^2 - c^2) + bc(b-c) \\ &= (b-c)\{a^2 - a(b+c) + bc\} = (b-c)\{a^2 - ab - ac + bc\} \\ &= (b-c)\{a(a-b) - c(a-b)\} \\ &= (b-c)(a-b)(a-c) = -(a-b)(b-c)(c-a). \end{aligned}$$

[ জ্যেষ্ঠ্য : রাশিটি ভাজিবার সময় প্রথম বন্ধনৌ ঠিক রাখিয়া বাকীগুলিকে ভাজিয়া এমনভাবে আবার সাজাইতে হইবে যাহাতে প্রত্যেক বন্ধনীর ভিতরে প্রথম বন্ধনীর  $(b-c)$  পাওয়া যায়। আব, উত্তরটি  $(a-b)(b-c)(a-c)$  দেখওয়া যায়, কিন্তু সাধারণ নিয়ম এই যে, cyclic order-এর factorগুলি cyclic orderএ উত্তর দিতে হয়। Cyclic order হইবে

$(a-b)(b-c)(c-a)$ , উক্তরে  $(a-c)$  এইটি cyclic order এর সহিত মিলিভেছে না, cyclic order  $(c-a)$  হইবে। এখন দেখ  $a-c = -c+a$   
 $-(c-a)$ , সুতরাং  $a-c$  এর স্থানে  $-(c-a)$  লেখা যায়।  $(c-a)$   
 চিহ্ন আছে, উহা সর্ব প্রথমে বসাইতে হয়। ]

উদা. 35. Factorize  $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$ . [P.U.'30]

$$\begin{aligned} \text{পদস্ব রানি} &= bc(b-c) + c^2a - ca^2 + a^2b - ab^2 \\ &= bc(b-c) + a^2b - a^2c - ab^2 + ac^2 \\ &- bc(b-c) + a^2(b-c) - a(b^2-c^2) = (b-c)(bc+a^2-ab-ac) \\ &= (b-c)\{a(a-c)-b(a-c)\} = (b-c)(a-b)(a-c) \\ &= -(a-b)(b-c)(c-a). \end{aligned}$$

উদা. 36. Factorize  $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$ .  
 [ D. B. 1930 ]

$$\begin{aligned} \text{পদস্ব রানি} &= a(b^2-c^2) + bc^2 - a^2b + a^2c - b^2c \\ &= a(b^2-c^2) - a^2(b-c) - bc(b-c) \\ &= (b-c)(ab+ac-a^2-bc) = (b-c)\{a(c-a)-b(c-a)\} \\ &= (b-c)(c-a)(a-b) = (a-b)(b-c)(c-a). \end{aligned}$$

উদা. 37 Factorize  $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ .

$$\begin{aligned} \text{পদস্ব রানি} &= a^3(b-c) + b^3c - ab^3 + ac^3 - bc^3 \\ &= a^3(b-c) - a(b^3-c^3) + bc(b^2-c^2) \\ &= a^3(b-c) - a(b-c)(b^2+bc+c^2) + bc(b+c)(b-c) \\ &= (b-c)\{a^3 - a(b^2+bc+c^2) + bc(b+c)\} \\ &= (b-c)(a^3 - ab^2 - abc - ac^2 + b^2c + bc^2) \\ &= (b-c)(a^3 - ab^2 - abc + b^2c - ac^2 + bc^2) \\ &= (b-c)\{a(a^2-b^2) - bc(a-b) - c^2(a-b)\} \\ &= (b-c)(a-b)(a^2+ab-bc-c^2) \\ &= (a-b)(b-c)\{(a+c)(a-c) + b(a-c)\} \\ &= (a-b)(b-c)(a-c)(a+c+b) \\ &= -(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c). \end{aligned}$$



উদা. 38. Factorize  $(b-c)^3 + (c-a)^3 + (a-b)^3$ .

[ C. U. '29, '39 ]

মনে কর,  $x = b - c$ ,  $y = c - a$ ,  $z = a - b$ ,

$\therefore x + y + z = b - c + c - a + a - b = 0$ .

এক্ষণে,  $(b-c)^3 + (c-a)^3 + (a-b)^3$

$$= x^3 + y^3 + z^3 = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + 3xyz$$

$$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 3xyz$$

$$= 0 \times (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 3xyz$$

$$= 0 + 3xyz = 3xyz = 3(b-c)(c-a)(a-b).$$

উদা. 39. Factorize  $(x+a)^2(b-c) + (x+b)^2(c-a)$

$$+ (x+c)^2(a-b).$$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = (x^2 + 2ax + a^2)(b-c) + (x^2 + 2bx + b^2)(c-a)$$

$$+ (x^2 + 2cx + c^2)(a-b)$$

$$= x^2(b-c+c-a+a-b) + 2x\{a(b-c) + b(c-a) + c(a-b)\}$$

$$+ a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$$

$$= x^2 \times 0 + 2x \times 0 + a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$$

$$= -(a-b)(b-c)(c-a).$$

উদা. 40. Resolve into factors

$$a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 3abc. \quad [ \text{C. U. '32, '35} ]$$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = (a^2b + a^2c + abc) + (b^2c + ab^2 + abc)$$

$$+ (c^2a + c^2b + abc)$$

$$= a(ab + ac + bc) + b(bc + ab + ac) + c(ac + bc + ab)$$

$$= (ab + ac + bc)(a + b + c).$$

[ এখানে  $3abc$ র এক একটি  $abc$ কে এক একটি পদের সহিত লওয়া হইল । ]

উদা. 41. Factorize  $bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b) + 3abc$ .

[ C. U. 1939 ]

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = bc(b+c) + abc + ca(c+a) + abc + ab(a+b) + abc$$

$$= bc(b+c+a) + ca(c+a+b) + ab(a+b+c)$$

$$= (a+b+c)(bc+ca+ab).$$

উদা. 42. Factorize  $a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+3abc$ .

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= (a^2b+a^2c+abc)+(ab^2+abc+b^2c) \\ &\quad + (abc+ac^2+bc^2) \\ &= (a+b+c)(ab+bc+ca) \quad [\text{উদা 40 দেখ}]\end{aligned}$$

উদা. 43. Factorize  $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$ .  
[ C. U. '33, '50 ]

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= a^2(b+c)+b^2c+ab^2+ac^2+bc^2+2abc \\ &= a^2(b+c)+(ab^2+ac^2+2abc)+(b^2c+bc^2) \\ &= a^2(b+c)+a(b+c)^2+bc(b+c)=(b+c)(a^2+ab+ac+bc) \\ &= (b+c)\{a(a+b)+c(a+b)\}=(b+c)(c+a)(a+b).\end{aligned}$$

উদা. 44. Factorize  $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+2abc$ .

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= bc(b+c)+ac^2+a^2c+a^2b+ab^2+2abc \\ &= bc(b+c)+(a^2b+a^2c)+(ab^2+ac^2+2abc) \\ &= bc(b+c)+a^2(b+c)+a(b+c)^2=(b+c)(bc+a^2+ab+ac) \\ &= (b+c)\{a(a+b)+c(a+b)\}=(b+c)(c+a)(a+b).\end{aligned}$$

উদা. 45. Factorize  $a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+2abc$ .

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= a(b^2+c^2)+2abc+a^2b+a^2c+b^2c+bc^2 \\ &= a(b^2+c^2+2bc)+a^2(b+c)+bc(b+c) \\ &= a(b+c)^2+a^2(b+c)+bc(b+c) \\ &= (b+c)(ab+ac+a^2+bc)=(b+c)(c+a)(a+b).\end{aligned}$$

উদা. 46. Factorize  $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$   
 $+a^3+b^3+c^3$ .

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= \{a^2(b+c)+a^3\}+\{b^2(c+a)+b^3\}+\{c^2(a+b)+c^3\} \\ &= a^2(b+c+a)+b^2(c+a+b)+c^2(a+b+c) \\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2).\end{aligned}$$

উদা. 47. Factorize  $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$ .

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= x^3+y^3+z^3+3(x+y)(y+z)(z+x)-x^3-y^3-z^3 \\ &= 3(x+y)(y+z)(z+x).\end{aligned}$$

উদা. 48. Factorize  $a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 9abc$ .

[ A. U. 1922 ]

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= a(b^2 - 2bc + c^2) + b(c^2 - 2ca + a^2) + c(a^2 - 2ab + b^2) + 9abc \\ &= b^2(c+a) + c^2(a+b) + a^2(b+c) - 2abc - 2abc - 2abc + 9abc \\ &= b^2(c+a) + c^2(a+b) + a^2(b+c) + 3abc \\ &= (a+b+c)(ab+bc+ca). \quad [\text{উদা. 40 দেখা}] \end{aligned}$$

উদা. 49. Factorize  $(a+b+c)(ab+bc+ca) - abc$ .

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= \{a+(b+c)\}\{a(b+c)+bc\} - abc \\ &= a^2(b+c) + a(b+c)^2 + bc(b+c) + abc - abc \\ &= (b+c)(a^2+ab+ac+bc) = (b+c)(c+a)(a+b), \end{aligned}$$

উদা. 50. Factorize  $(b+c)(c+a)(a+b) + abc$ .

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b + 2abc + abc \\ &= (a^2b + ab^2 + abc) + (b^2c + bc^2 + abc) + (a^2c + ac^2 + abc) \\ &= ab(a+b+c) + bc(b+c+a) + ca(a+c+b) \\ &= (a+b+c)(ab+bc+ca). \end{aligned}$$

উদা. 51. Factorize  $(3x-2y)^3 - (2x-3y)^3 - (x+y)^3$ .

মনে কর,  $a=3x-2y$ ,  $b=x+y$ ,  $\therefore a+b=3x-2y$ .

$$\begin{aligned}\therefore \text{প্রদত্ত রাশি} &= (a+b)^3 - a^3 - b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) - a^3 - b^3 \\ &= 3ab(a+b) = 3(2x-3y)(x+y)(3x-2y). \end{aligned}$$

উদা. 52. Factorize  $x^3 + (x-1)^3 + (1-2x)^3$ . [ D. B. 1940 ]

মনে কর,  $a=x$ ,  $b=x-1$ ,  $c=1-2x$ ,

$$\therefore a+b+c = x+x-1+1-2x = 0.$$

এক্ষেপে, প্রদত্ত রাশি  $= a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$  [  $\because a+b+c=0$  ]

$$= 3x(x-1)(1-2x) \quad [a, b, c \text{ এর মান বসাইলে}]$$

উদা. 53. Factorize  $a(b-c)x^2 + b(c-a)x + c(a-b)$ .

[ উদা. 20 দেখা ]

[ D. B. 1933 ]

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= (ab-ac)x^2 + (bc-ab)x + (ac-bc) \\ &= (ab-ac)x^2 - (ab-ac)x - (ac-bc)x + (ac-bc) \\ &\quad [ \because -(ab-ac) - (ac-bc) = (bc-ab) ] \end{aligned}$$

$$= (ab - ac)x(x - 1) - (ac - bc)(x - 1) \\ = (x - 1)\{(ab - ac)x - (ac - bc)\} = (x - 1)(abx - acx - ac + bc).$$

উদা. 54. Factorize  $8(a+b+c)^3 - (a+b)^3 - (b+c)^3 - (c+a)^3$ .

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = (2a+2b+2c)^3 - (a+b)^3 - (b+c)^3 - (c+a)^3 \\ \{ (a+b) + (b+c) + (c+a) \}^3 - (a+b)^3 - (b+c)^3 - (c+a)^3 \\ = (a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a) \\ - (a+b)^3 - (b+c)^3 - (c+a)^3 \\ = 3(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c) \\ = 3(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)$$

উদা 55 Factorize  $(2b-a)^3 + (2a-b)^3 - (a+b)^3$ .

[ B U. 1900 ]

মনে কর,  $x = 2b - a$ ,  $y = 2a - b$ ,  $\therefore x + y = a + b$ .

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = x^3 + y^3 - (x+y)^3 \\ = x^3 + y^3 - \{x^3 + y^3 + 3xy(x+y)\} \\ = x^3 + y^3 - x^3 - y^3 - 3xy(x+y) = -3xy(x+y) \\ = -3(2b-a)(2a-b)(a+b) [ \because (2b-a) = (a-2b) ] \\ = 3(a-2b)(2a-b)(a+b)$$

উদা 56 Factorize  $(a+b-2c)^3 + (b+c-2a)^3 + (c+a-2b)^3$ .

[ I P. S. 1926 ]

মনে কর,  $x = a+b-2c$ ,  $y = b+c-2a$ ,  $z = c+a-2b$ .

$\therefore x+y+z = a+b-2c+b+c-2a+c+a-2b = 0$

প্রদত্ত রাশি  $= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$  [  $\because x+y+z=0$  ]

$$= 3(a+b-2c)(b+c-2a)(c+a-2b)$$

উদা. 57. Factorize  $a^3(b-c)^3 + b^3(c-a)^3 + c^3(a-b)^3$

প্রদত্ত রাশি  $= (ab-ac)^3 + (bc-ab)^3 + (ac-bc)^3$

$$= 3(ab-ac)(bc-ab)(ac-bc)$$

[  $\because ab-ac+bc-ab+ac-bc=0$  ]

$$= 3abc(b-c)(c-a)(a-b)$$

উদা. 58. Factorize  $2a^3 + 2a - 3ab - b + b^2$ . [ D. B. 1949 ]

প্রদত্ত রাশি  $= (2a^3 - 3ab + b^2) + 2a - b$

$$= (2a^2 - 2ab - ab + b^2) + 1(2a - b)$$

$$= (2a-b)(a-b) + 1(2a-b) = (2a-b)(a-b+1).$$

## Exercise 2

Rosolve into factors :—

1.  $m^4 + m^2n^2 + n^4$ . [C. U. '33]
2.  $x^4 + 4$ . [J. '34]
3.  $4x^2 - 4xy - 2yz - z^2$ . [C. U. '35]
4.  $a^2 - b^2 - c^2 + d^2 - 2(ad - bc)$ . [W. B. S. F. '53]
5.  $4x^4 + 81$ . [C. U. '37]
6.  $x^4 + 2x^2 + 9$ . [D. B. '30]
7.  $x^4 + 64$ . [W. B. S. F. '52 ; B. U. 1920 ; D. B. '31]
8.  $x^4 - 8x^2 + 4$ . [B. U. '24]
9.  $4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$ . [B. U. '23]
10.  $x^6 - 729$ . [D. B. '37]
11.  $x^3 - y^3 - 6xa + 2ya + 8a^2$ . [D. B. '48]
12.  $12x^3 + 65x + 77$ . [D. B. '34]
13.  $x^3 + 40xy - 21y^2$ . [D. B. '38]
14.  $8a^4 + 2a^2 - 45$ . [A. U. '27]
15.  $a^6 + 32a^3 - 64$ .
16.  $a^3 + b^3 - 8c^3 + 6abc$ .
17.  $a^3 - 3a - 2a^2 + 4$ . [C. U. '39]
18.  $x^3 + 16x^2 + 13x - 30$ . [D. B. '36]
19.  $x^3 + 9x^2 + 26x + 24$ . [D. B. '38]
20.  $(x^2 - 4x)(x^2 - 4x - 1) - 20$ . [B. U. '12]
21.  $(ax + by)^2 + (bx - ay)^2$ . [P. U. '26]
22.  $2(ab + cd) - a^2 - b^2 + c^2 + d^2$ . [C. U. '09]
23.  $(a + b)^2 - 10(a^2 - b^2) - 56(a - b)^2$ . [B. U. '34]
24.  $x(x - 1)(x - 2) + 3x + 3$ . [D. B. '36]
25.  $a(a - 1)(a - 2)(a - 3) - 120$ .
26.  $(x + 1)(x + 3)(x - 4)(x - 6) + 13$ .
27.  $(x + y + z)(xy + yz + zx) - xyz$ . [D. B. '32]
28.  $x^3 - y^3 + z^3 + 3xyz$ . [A. U. '28]
29.  $a(b^3 - c^3) + b(c^3 - a^3) + c(a^3 - b^3)$ . [M. U. '27]

30.  $a^2c^2(b-c) + c^2a^2(c-a) + a^2b^2(a-b).$

31.  $a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a+b)^2 - 4abc.$

32.  $(2x-3y)^3 + (3y-z)^3 + (z-2x)^3.$

33.  $(x+2)(x+3)(x+4) - 3.$

[C. U. 1946]

34.  $x^2 + 2x - (a+1)(a+3).$

[Hints :  $2x = (a+3) - (a+1)x$ ]

35.  $x(2x+1)(x-2)(2x-3) - 63.$

[ $x(2x-3)$  একদল এবং  $(2x+1)(x-2)$  আর একদল কর।]

36.  $(a+2b-c)^3 - (a+b)^3 - (b-c)^3.$

[Hints .  $(a+2b-c)^3 = \{(a+b) + (b-c)\}^3$ ]

37.  $4(ad-bc)^2 - (a^2+d^2-b^2-c^2)^2.$

[Hints :  $4(ad-bc)^2 = (2ad-2bc)^2$ ]

38.  $(1-c^2)(1+a)^2 - (1-a^2)(1-c)^2.$

[C. U. 1881]

39. (i)  $4(x^2+2x+5)^2 + 17(x^2+2x+5)(x^2+6x) + 4(x^2+6x)^2$

(ii)  $a^4 + 6a^3 + 4a^2 - 15a + 6.$

[C. U. 1948]

40.  $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$

[C. U. 1948]

41.  $x^2(b-c) + b^2(c-x) + c^2(x-b).$

[D. B '27]

42.  $x^6 - 22x^3 + 125.$

43.  $6a^2 - 2b^2 - 5bc - ab + 11ac + 3c^2.$

44.  $a^4 - 5a^3b + 6a^2b^2 - 5ab^3 + b^4.$

45.  $a^4b^4 + 1 + a^2b^2 - c^2 + 2abc.$

46.  $x^5 + 4x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 4x + 1.$

47.  $xy(x^3 - y^3) + yz(y^3 - z^3) + zx(z^3 - x^3).$

48.  $(a-b)^5 + (b-c)^5 + (c-a)^5.$

## The Remainder Theorem and Divisibility

### ( ভাগশেষ ও বিভাজ্যতা বিষয়ক উপপাদ্য )

12. অপেক্ষক :  $x, a$  প্রভৃতি যে কোন অক্ষরযুক্ত  $x$  সহ অক্ষরটির রাশিমালা বা অপেক্ষক ( function বা expression ) বলে। অপেক্ষকটির মান ঐ অক্ষরটির মানের উপর নির্ভর করে। ঐ অক্ষরটিকে ঐ অপেক্ষকের চল ( variable ) বলে। যথা—

(1)  $x^3 + 3x + 2, a^3 + 5a^2 + 4$  প্রভৃতি রাশি যথাক্রমে  $x$  ও  $a$  এর অপেক্ষক। প্রথমটিতে  $x$  এবং দ্বিতীয়টিতে  $a$  চল।

(2) অতীতরূপে  $a^2 + ab + b^2$  বা  $x^3 - y^3$  কে যথাক্রমে  $a$  ও  $b$  এর এবং  $x$  ও  $y$  এর অপেক্ষক বলে।

লিখন প্রণালী :  $x$ -যুক্ত কোন অপেক্ষক বা রাশিমালাকে সংক্ষেপে  $f(x)$  লেখা হয়।

এখন দেখ,  $2x^2 + 3x - 4$  একটি অপেক্ষক, সুতরাং  $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$ । এক্ষেপে যদি  $x=2$  ধরা হয়, তবে  $f(2) = 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 4$  হইবে।

অতীতরূপে  $f(0) = 2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 - 4$  হইবে।

মূলদ অখণ্ড অপেক্ষক : কোন অপেক্ষকের চল রাশিটির (  $x$  বা  $a$  এর ) ঘাতগুলি যদি ধনাত্মক পূর্ণ বা অখণ্ড সংখ্যা হয়, তবে তাহাকে মূলদ অখণ্ড অপেক্ষক ( Rational and integral function ) বলে। এই অপেক্ষকে চল রাশিটির কোন মূল থাকে না।

$px^n + qx^{n-1} + rx^{n-2} + \dots + lx + m$  রাশিমালায় যদি  $n$  অখণ্ড ধনরাশি ( positive integer ) হয় এবং  $p, q, r, \dots, l, m$  এর প্রত্যেকটি যদি ধ্রুবক হয়, তবে উহাকে  $x$ -এর মূলদ অখণ্ড অপেক্ষক বলে।

### 13. ভাগশেষ বিষয়ক উপপাদ্য ( Remainder Theorem )

$x$ -যুক্ত কোন মূলদ অখণ্ড রাশিমালাকে  $x - a$  দ্বারা ভাগ করিলে যে ভাগশেষ হইবে তাহা ঐ রাশিমালায়  $x$  এর স্থানে  $a$  বসাইয়া পাওয়া যায়।

( অর্থাৎ  $x$  এর স্থানে  $a$  বসাইয়া এই রাশিমালার যে মান হইবে তাহাই নির্ণয় ভাগশেষ ) ।

$$\begin{aligned} \text{প্রমাণ ( প্রথম প্রণালী ) : } & x - a \quad mx^2 + nx + l \quad mx + (ma + n) \\ & \quad \quad \quad mx^2 - max \\ & \quad \quad \quad (ma + n)x + l \\ & \quad \quad \quad \underline{(ma + n)x} \quad \underline{a(ma + n)} \\ & \quad \quad \quad ma^2 + na + l, \text{ ইহাই ভাগশেষ ।} \end{aligned}$$

এখন দেখ প্রদত্ত রাশিমালায়  $x$ ,  $a$  স্থানে  $a$  বসাইলে পাই

$$ma^2 + na + l, \text{ যন্ত্রাং উপপাত্তটি প্রমাণিত হইল ।}$$

( দ্বিতীয় প্রণালী ) : মনে কর, উক্ত ভাগ প্রক্রিয়ায়  $Q$  ভাগফল এবং  $R$  ভাগশেষ (  $x$ -বর্জিত ) ।

$$\text{এক্ষেপে প্রমাণ করিতে হইবে যে, } R = ma^2 + na + l.$$

প্রমাণ :  $\because$  ভাজ্য = ভাজক  $\times$  ভাগফল + ভাগশেষ,

$\therefore mx^2 + nx + l = (x - a) \times Q + R$ , ইহা একটি অভেদ বলিয়া  $x$  এর যে কোন মান ধরিলে উভয় পক্ষ সমান থাকিবে এবং  $R$ -এর স্থানের কোন পরিবর্তন হইবে না, কারণ, উহা  $x$ -বর্জিত । মনে কর,  $x$  এর মান  $a$  ধরিলে  $Q$ -এর মান  $Q'$  হইবে ।

$$\therefore ma^2 + na + l = (a - a) \times Q' + R = 0 \times Q' + R = R.$$

অতএব, উপপাত্তটি প্রমাণিত হইল ।

[ জটিল্য : (1) কোন রাশিমালাকে  $x - a$  দ্বারা ভাগ করিয়া কত ভাগশেষ থাকে তাহা এই রাশিমালায়  $x$  এর স্থানে  $a$  বসাইয়া পাওয়া যায় ।

(2) কোন রাশিমালাকে  $x + a$  দ্বারা ভাগ করিলে কত ভাগশেষ হয় তাহা নির্ণয় করিবার জন্ত এই রাশিমালায়  $x$  এর মান  $-a$  ধরিতে হয় ।

(3) কোন রাশিমালাকে  $bx + a$  দ্বারা ভাগ করিলে কত ভাগশেষ হয় তাহা নির্ণয় করিবার জন্ত এই রাশিমালায়  $x$  এর মান  $-\frac{a}{b}$  ধরিতে হয় । ]

**উদাহরণ।** Find, without actual division, the remainder in the following :—

$$(a) (x^3 + 2x^2 - 3x + 5) \div (x - 3).$$

$$) (px^2 + qx + r) \div (x + a).$$



(a) এখানে ভাজ্যে  $x$  এর মান 3 বসাইলে ভাগশেষ পাওয়া যাইবে।

$$\therefore \text{নির্ণেয় ভাগশেষ} = (3)^3 + 2(3)^2 - 3 \times 3 + 5 \\ = 27 + 18 - 9 + 5 = 41.$$

(b)  $\therefore$  ভাজকটি  $x+a$ ,  $\therefore$  ভাজ্যে  $x = -a$  ধরি।  $\therefore$  ভাগশেষটি পাওয়া যাইবে।

$$\therefore \text{নির্ণেয় ভাগশেষ} = p(-a)^2 + q(-a) + r = pa^2 - qa + r.$$

#### 14 গুণনীয়ক উপপাত্ত (The Factor Theorem)

$x$ -এর কোন মূলদ অখণ্ড রাশিমালায় যদি  $x$ -এর মান  $a$  ধরিলে রাশিমালার মান শূন্য (0) হয়, তবে  $(x-a)$  ঐ রাশিমালার একটি গুণনীয়ক (factor) হইবে অর্থাৎ রাশিমালটি  $x-a$  দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

[সংক্ষেপে বলা যায়,  $f(a)=0$  হইলে,  $f(x)$  এর একটি গুণনীয়ক  $(x-a)$  হইবে।]

**প্রমাণ :**  $\therefore$  প্রদত্ত রাশিমালায়  $x$ -এর স্থানে  $a$  বসাইলে রাশিমালার মান শূন্য হয়,

$\therefore$  ভাগশেষ উপপাত্ত অনুসারে উহাকে  $x-a$  দ্বারা ভাগ করিলে ভাগশেষ শূন্য হইবে।

$\therefore$  প্রদত্ত রাশিমালটি  $x-a$  দ্বারা বিভাজ্য অর্থাৎ  $x-a$  উহার একটি গুণনীয়ক।

[**উদ্য :** (1)  $x$ -এর মান  $-a$  ধরিলে যদি কোন রাশিমালার মান শূন্য (0) হয়, তবে রাশিমালটি  $x-( -a)$  বা  $x+a$  দ্বারা বিভাজ্য, অর্থাৎ  $x+a$  উহার একটি গুণনীয়ক।

(2)  $x$ -এর মান  $-\frac{b}{a}$  ধরিলে যদি রাশিমালার মান শূন্য হয়, তবে  $ax+b$  উহার একটি গুণনীয়ক হইবে।]

#### উদাহরণমালা 3

**উদা. 1.** Prove that  $x^3 - 7x^2 + 11x - 2$  is exactly divisible by  $x-2$ .

• এখানে ভাজক  $= x-2$ , সুতরাং,  $x$  এর মান 2 হইলে যদি প্রদত্ত রাশিমালার মান 0 হয়, তবে উহা  $x-2$  দ্বারা বিভাজ্য।

$$\begin{aligned} \text{এক্ষে, } x^3 - 7x^2 + 11x - 2 &= (2)^3 - 7(2)^2 + 11 \times 2 - 2 \\ &= 8 - 28 + 22 - 2 = 0. \end{aligned}$$

∴ প্রদত্ত রাশিমালা  $x-2$  দ্বারা বিভাজ্য।

Show that  $x-1$  is a factor of  $x^4 - 3x^2 + 2$ .

প্রদত্ত রাশিমালায়  $x$  এর মান 1 বসাইলে উহার মান  $= (1)^4 - 3.(1)^2 + 2$   
 $= 1 - 3 + 2 = 0$  হয়, ∴ রাশিমালাটির একটি গুণনীয়ক  $x-1$  হইবে।

উদা. 3. Find for what value of  $p$  the expression  $x^5 - 61x + p$  is exactly divisible by  $x+1$ . [M. U. 1926]

এখানে ভাজক  $x+1$ , সুতরাং  $x = -1$  ধরিলে যদি প্রদত্ত রাশিমালায় মান শূন্য হয়, তবে উহা  $x+1$  দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

$$\begin{aligned} \text{এক্ষে, } x^5 - 61x + p &= (-1)^5 - 61 \times (-1) + p = -1 + 61 + p \\ &= 60 + p. \end{aligned}$$

$$\therefore \text{এখানে } 60 + p = 0, \quad \therefore p = -60.$$

উদা. 4. Find the relation between  $b$  and  $c$  so that  $x^3 + bx + c$  and  $x^3 + cx + b$  may have a common factor. [P. U. 1891]

মনে কর, সাধারণ গুণনীয়কটি  $(x-a)$ .

এক্ষে '∴  $x^3 + bx + c$  এর  $x-a$  একটি গুণনীয়ক,

$$\therefore a^3 + ab + c = 0 \dots\dots(1).$$

আবার, '∴  $x^3 + cx + b$  এর  $x-a$  একটি গুণনীয়ক,

$$\therefore a^3 + ac + b = 0 \dots\dots(2).$$

এক্ষে (1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই

$$ab - ac - b + c = 0, \text{ বা } a(b-c) = b-c, \quad \therefore a = \frac{b-c}{b-c} = 1.$$

এক্ষে (1)-এ  $a$  এর মান 1 বসাইয়া পাই

$$1^3 + 1.b + c = 0, \text{ বা, } b + c + 1 = 0.$$

∴ নির্ণয় সূত্র হইল  $b + c + 1 = 0$  হইবে।

উদা. 5. What value (not zero) must  $a$  have, if  $x^2+x-a$  and  $x^3-x-a$  have a common factor ? [P. U. 1925]

মনে কর, সাধারণ গুণনীয়কটি  $x-p$ ,

$\therefore x^2+x-a$  এর একটি গুণনীয়ক  $x-p$ ,  $\therefore p^2+p-a=0$

আবার,  $x^3-x-a$  এর একটি গুণনীয়ক  $x-p$ ,  $\therefore p^3-p-a=0 \dots(2)$

$\therefore p^3-p-a=0 \dots(2)$

এক্ষেপে, (1)-(2) করিয়া পাই,  $-p^3+p^2+2p=0$ ,

বা,  $-p(p^2-p-2)=0$ , বা,  $-p(p-2)(p+1)=0$ ,

$\therefore p=0, -1, 2$  হইতে পারে।

$p$  এর মান (1)-এ বসাইলে  $a$  এর নির্ণেয় মান পাওয়া যাইবে।

$\therefore$  (1)-এ  $p=-1$  বা  $0$  বসাইলে  $a=0$  হয়, সুতরাং উহা গ্রাহ্য হইবে না (প্রদত্ত সর্ত অতুসারে)।

এক্ষেপে (1)-এ  $p=2$  ধরিলে পাই  $2^2+2-a=0$ ,  $\therefore a=6$ .

$\therefore a$ -এর নির্ণেয় মান 6 হইল।

উদা. 6. Find the condition that  $x^3+(p+q)x+a$  may be divisible by  $x+p+q$ . [P. U. 1895]

এখানে ভাজক  $x+p+q$ , সুতরাং  $x+p+q=0$  অর্থাৎ  $x=-(p+q)$  হইলে যদি প্রদত্ত রাশিমালায় মান শূন্য হয়, তবে উহা  $x+p+q$  দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

এক্ষেপে,  $\{-(p+q)\}^3+(p+q) \times -(p+q)+a=0$ ,

বা,  $-(p+q)^3+(p+q)^2+a=0$ , বা  $(p+q)^3+(p+q)^2-a=0$ ,

বা,  $(p+q)^3+(p+q)^2=a$ , বা,  $(p+q)^2(p+q+1)=a$ .

অতএব,  $a=(p+q)^2(p+q+1)$  হইবে, ইহাই নির্ণেয় সর্ত।

উদা. 7. If  $x+a$  be the H. C. F. of  $px^2+qx+r$  and  $x^2+qx+p$ , prove that  $p+q+r=0$ , or  $q=p+r$ .

$\therefore x+a$  প্রদত্ত রাশি দুইটির গ. সা. গু.,

$\therefore x+a=0$  অর্থাৎ  $x=-a$  হইলে রাশি দুইটির মান শূন্য হইবে।

প্রদত্ত রাশি দুইটিতে  $x$  এর মান  $-a$  বসাইয়া পাই

$pa^2-qa+r=0 \dots(1)$  এবং  $ra^2-qa+p=0 \dots(2)$

$$1) - (2) \text{ করিয়া পাই } pa^2 - ra^2 - p + r = 0,$$

$$\text{বা, } a^2(p-r) - (p-r) = 0,$$

$$\text{বা, } a^2(p-r) = (p-r), \text{ বা, } a^2 = 1, \quad a = \pm 1$$

$$a = 1 \text{ হয়, তবে (1) হইতে পাই } p(1)^2 - q(1) + r = 0$$

$$q + r = 0, \quad \therefore q = p + r.$$

আবার যদি  $a = -1$  হয়, তবে (1) হইতে পাই

$$p(-1)^2 - q(-1) + r = 0, \text{ বা, } p + q + r = 0.$$

অতএব  $x + a$  প্রদত্ত রাশি দুইটির গ. সা. গু. হইলে

$$p + q + r = 0 \text{ অথবা } q = p + r \text{ হইবে।}$$

**উদা. 8.** Shew that  $(ax+by)(bx+cy)(cx+ay) - (ay+bx) \times (by+cx)(cy+ax)$  contains the factors  $(x-y)$ ,  $(a-b)$ ,  $(b-c)$  and  $(c-a)$ . [ M. U. 1874 ]

যদি  $x-y$  এর মান শূন্য হইলে প্রদত্ত রাশিমালার শূন্য হয়, তবে  $x-y$  উহার একটি গুণনীয়ক হইবে।  $x-y=0, \therefore x=y.$

$$\text{একপে প্রদত্ত রাশিমালা} = (ax+bx)(bx+cx)(cx+ax)$$

$$- (ax+bx)(bx+cx)(cx+ax) = 0 \text{ [ } y \text{ এর স্থানে } x \text{ বসাইয়া ]}$$

$$\therefore x-y \text{ এই রাশিমালার একটি উৎপাদক।}$$

অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে  $a-b$ ,  $b-c$ ,  $c-a$  প্রত্যেকটি এই রাশি-  
মালার গুণনীয়ক।

## 15. বিভাজ্যতা বিষয়ক কতিপয় উপপাত্ত

**উপপাত্ত 1.**  $n$  যে কোন অখণ্ড ধনরাশি (যুগ্ম বা অযুগ্ম) হইলে,  $a^n - b^n$  রাশিটি  $a-b$  দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

**প্রমাণ :** মনে কর,  $a^n - b^n$  কে  $a-b$  দিয়া ভাগ করিলে ভাগফল  $Q$  এবং  $a-b$  বর্জিত ভাগশেষ  $R$  হইবে।

$$\therefore a^n - b^n = (a-b) \times Q + R \text{ (ইহা একটি অভেদ)}$$

$\therefore R$  ভাগশেষটি  $a$ -বর্জিত,  $\therefore a$  এর মান বাহাই হউক না কেন, তাহাতে  $R$  এর মান পরিবর্তিত হইবে না।  $Q$ টি  $a$ -বর্জিত না হওয়ায়  $a$ এর মান পরিবর্তিত হইলে  $Q$ এর মান পরিবর্তিত হইবে।

মনে কর,  $a$  এর মান  $b$  ধরিলে  $Q$  এর মান  $Q'$  হয়।

এক্ষেপে উক্ত অভেদে  $a$  এর স্থানে  $b$  লিখিয়া পাই

$$b^n - b^n = (b - b) \times Q' + R = 0 \times Q' + R = R$$

$\therefore R = b^n - b^n = 0$ . অতএব  $a^n - b^n$ ,  $a - b$  দ্বারা বিভাজ্য।

[জটিল্য: (i)  $\frac{a^n - b^n}{a - b} = \frac{a - b}{a - b} = 1$  (যদি  $n = 1$  হয়)

(ii)  $\frac{a^n - b^n}{a - b} = \frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$  (যদি  $n = 2$  হয়)

(iii)  $\frac{a^n - b^n}{a - b} = \frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2$  (যদি  $n = 3$  হয়)

(iv) সাধারণভাবে  $\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \dots + b^{n-1}$ .

উপপাদ্য 2.  $n$  যে কোন যুগ্ম পূর্ণসংখ্যা হইলে  $a^n - b^n$  রাশিটি  $a + b$  দ্বারা বিভাজ্য হয়, কিন্তু  $n$  অযুগ্ম হইলে বিভাজ্য হইবে না।

(পূর্ব উপপাদ্যের দ্বারা এখানে লেখা যায়)

$$a^n - b^n = (a + b) \times Q + R \text{ (অভেদে)।}$$

$\therefore R$  ভাগশেষটি  $a$ -বর্জিত,  $\therefore a$  এর কোন মানে  $R$  পরিবর্তিত হইবে না। উক্ত অভেদে  $a$  এর স্থানে  $-b$  লিখিয়া পাই

$$(-b)^n - b^n = (-b + b) \times Q' + R = 0 \times Q' + R = R.$$

এক্ষেপে,  $n$  যুগ্ম সংখ্যা হইলে  $(-b)^n = b^n$  হইবে এবং সেস্থলে

$$(-b)^n - b^n = b^n - b^n = 0 \text{ হইবে, সুতরাং তখন } R = 0 \text{ হইবে।}$$

অতএব  $n$  যুগ্ম পূর্ণসংখ্যা হইলে  $a^n - b^n$ ,  $a + b$  দ্বারা বিভাজ্য হয়।

আবার, যদি  $n$  অযুগ্ম সংখ্যা হয়, তবে  $(-b)^n = -b^n$  হইবে এবং তখন  $(-b)^n - b^n = -b^n - b^n = -2b^n$  হইবে বলিয়া  $R$  এর মান শূন্য হইবে না। অতএব,  $n$  অযুগ্ম হইলে  $a + b$  দ্বারা  $a^n - b^n$  বিভাজ্য হইবে না।

**উপপাত্ত 3.**  $n$  যে-কোন অযুগ্ম পূর্ণ ধনসংখ্যা হইলে  $a+b$  দ্বারা  $a^n+b^n$  বিভাজ্য হয়; কিন্তু  $n$  যুগ্ম হইলে বিভাজ্য হয় না।

(পূর্বের ত্রায়)  $a^n+b^n=(a+b) \times Q+R$  (ইহা একটি অভেদ)।

এর স্থানে  $-b$  লিখিয়া পাই

$$(-b)^n+b^n=(-b+b) \times Q'+R=0 \times Q'+R=R.$$

এক্ষেপে,  $n$  অযুগ্ম হইলে  $(-b)^n=-b^n$  হইবে এবং সেস্থলে

$R=(-b)^n+b^n=-b^n+b^n=0$  হইবে; সুতরাং  $n$  অযুগ্ম পূর্ণধনসংখ্যা হইলে  $a^n+b^n$ ,  $a+b$  দ্বারা বিভাজ্য হয়।

আবার  $n$  যুগ্ম সংখ্যা হইলে  $(-b)^n=b^n$  হইবে এবং তখন

$$R=(-b)^n+b^n=b^n+b^n=2b^n \text{ হইবে, কিন্তু } 0 \text{ হইবে না।}$$

অতএব  $n$  যুগ্ম হইলে  $a^n+b^n$ ,  $a+b$  দ্বারা বিভাজ্য নহে।

**উপপাত্ত 4.**  $n$  যুগ্ম বা অযুগ্ম যে কোন সংখ্যাই হউক-না কেন  $a^n+b^n$  কখন  $a-b$  দ্বারা বিভাজ্য হয় না।

(পূর্বের ত্রায়)  $a^n+b^n=(a-b) \times Q+R$  (অভেদে সমান)

উক্ত অভেদে  $a$ র স্থানে  $b$  বসাইয়া পাই

$$b^n+b^n=(b-b) \times Q'+R=0 \times Q'+R=R.$$

$\therefore R=b^n+b^n=2b^n$ , কিন্তু শূন্য নহে।

অতএব,  $a^n+b^n$  কখনই  $a-b$  দ্বারা বিভাজ্য নহে।

#### উদাহরণমালা 4-

**উদা. 1.** Prove that  $13^8-6^8$  is divisible by 19.

$\therefore$  8 অখণ্ড যুগ্ম সংখ্যা,  $\therefore 13^8-6^8$  রাশিটি  $(13+6)$  বা 19 দ্বারা বিভাজ্য।

**উদা. 2.** If  $n$  be a positive integer, show that  $5^{3n}-3^{4n}$  is divisible by 44.

$$5^{3n}-3^{4n}=(5^3)^n-(3^4)^n=(125)^n-(81)^n.$$

এস্থলে  $n$  অখণ্ড ধন-সংখ্যা বলিয়া  $(125)^n-(81)^n$  রাশিটি  $(125-81)$  বা 44 দ্বারা বিভাজ্য।

১. ৪. If  $n$  be a positive even integer prove that each of the last two digits in  $4^{3n} - 6^{2n}$  is zero and it is divisible by 100.

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = (4^3)^n - (6^2)^n = (64)^n - (36)^n.$$

এক্ষণে,  $\because n$  যুগ্ম অথবা ধন-সংখ্যা,  $\therefore (64)^n - (36)^n$   $(64+36)$  বা 100 দ্বারা বিভাজ্য। আবার 100 প্রদত্ত রাশিটির একটি গুণনীয়ক বলিয়া ঐ রাশির শেষ দুই অঙ্ক 0 হইবে।

উদা. 4. Show that the last digit in  $3^n + 2^n$ , when  $n$  is an odd positive integer, must be 5.

$\because n$  অযুগ্ম অথবা ধনসংখ্যা,  $\therefore 3^n + 2^n$  রাশিটি 3+2 অর্থাৎ 5 দ্বারা বিভাজ্য। অতএব উক্ত রাশিটির শেষ অঙ্ক 5 অথবা 0 হইবে। কিন্তু যুগ্ম সংখ্যার যে কোন ঘাত যুগ্ম সংখ্যা এবং অযুগ্ম সংখ্যার যে কোন ঘাত অযুগ্ম সংখ্যা হয় বলিয়া  $3^n$  অযুগ্ম এবং  $2^n$  যুগ্ম হইবে।  $\therefore$  উহাদের সমষ্টি অযুগ্ম হইবে। অতএব প্রদত্ত রাশির শেষ অঙ্ক 0 না হইয়া 5 হইবে।

উদা. 5. Prove that a number is divisible by 9, when the sum of its digits is divisible by 9. [ P. U. 1915 ]

একক, দশক, প্রভৃতি স্থানে যথাক্রমে  $m, l$  প্রভৃতি ধরিয়া প্রদত্ত সংখ্যাকে সাধাবণভাবে  $p.10^n + q.10^{n-1} + r.10^{n-2} + \dots + l.10 + m$  এই আকারে প্রকাশ করা যায়। ইহাকে 9 বা  $(10-1)$  দ্বারা ভাগ করিলে যে ভাগশেষ থাকে তাহা উক্ত রাশিমালায় 10এর স্থানে 1 বদাইয়া পাওয়া যায়।

$$\begin{aligned} \text{অতএব, ঐ ভাগশেষ} &= p(1)^n + q(1)^{n-1} + \dots + l.1 + m \\ &= p + q + \dots + l + m. \end{aligned}$$

অতএব, যদি ঐ ভাগশেষটি অর্থাৎ  $p, q, r, \dots, l, m$  অঙ্কগুলির সমষ্টি 9 দ্বারা বিভাজ্য হয়, তবে প্রদত্ত সংখ্যাটিও 9 দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

[ অজ্ঞা প্রণালী। ]  $n$  সংখ্যাটি এক অঙ্কবিশিষ্ট হইলে তাহা অবশ্যই 9 হইবে, সুতরাং তাহা 9 দ্বারা বিভাজ্য। মনে কর, সংখ্যাটি দুই অঙ্কবিশিষ্ট এবং  $y$  দশক স্থানীয় ও  $x$  একক স্থানীয় অঙ্ক।  $\therefore$  সংখ্যাটি  $= 10y + x$ .

$$\text{এক্ষণে দেখ } (10y + x) \div 9 = \frac{9y + y + x}{9} = y + \frac{y+x}{9}.$$

অতএব  $(x+y)$  যদি 9 দ্বারা বিভাজ্য হয় অর্থাৎ অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি যদি 9 দ্বারা বিভাজ্য হয়, তবে সংখ্যাটি (অর্থাৎ  $10y+x$ )টি 9 দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

দুইএর অধিক অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যা হইলেও এইভাবে দেখান যায় যে উক্ত নিয়মটি সত্য হইতেছে।

উদা. 6. Show that if the difference between the sums of the digits in the odd and even places of a number is zero or divisible by 11, the number is divisible by 11.

মনে কর, সংখ্যাটি 4 অঙ্কের এবং প্রথম হইতে স্থানীয় অঙ্কগুলি যথাক্রমে  $x, y, z$  ও  $p$ । অতএব, সংখ্যাটি হইল  $1000x+100y+10z+p$ ।

$$\begin{aligned} \text{একপে, } & \frac{1000x+100y+10z+p}{11} \\ &= 90x+9y+\frac{10x+10z+y+p}{11} \\ &= 90x+9y+x+z+\frac{-x-z+y+p}{11} \\ &= 91x+9y+z+\frac{(y+p)-(x+z)}{11}. \end{aligned}$$

অতএব, দেখা যায় যে  $(y+p)-(x+z)$  যদি 0 হয় অথবা 11 দ্বারা বিভাজ্য হয়, তবে প্রদত্ত সংখ্যাটিও 11 দ্বারা বিভাজ্য হইবে। অতএব, অঙ্কসংখ্যা অধিক হইলেও ঐ নিয়মের সত্যতা সিদ্ধ হইবে।

উদা. 7. Find the continued product of  $(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)$ .

মনে কর, নির্ণেয় গুণফল  $=x$ ।

অতএব,  $x=(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)$ ।

উভয় পক্ষকে  $(a-b)$  দ্বারা গুণ করিয়া পাই

$$\begin{aligned} (a-b)x &= (a^2-b^2)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8) \\ &= (a^4-b^4)(a^4+b^4)(a^8+b^8) \\ &= (a^8-b^8)(a^8+b^8)=a^{16}-b^{16}. \end{aligned}$$

$$\therefore x = \frac{a^{16}-b^{16}}{a-b} = a^{15}+a^{14}b+a^{13}b^2+a^{12}b^3+\dots+ab^{14}+b^{15}.$$



উদা. 8. If  $n$  is any positive integer, shew that  
 $(ab)^n - (bc)^n + (cd)^n - (da)^n$  is divisible by  $ab - bc + cd - da$   
 [M. U. 1878]

$$ab - bc + cd - da = b(a - c) - d(a - c) = (a - c)(b - d).$$

প্রদত্ত রাশিমালাটি  $a$ র একটি মূলদ অথবা রাশি।

প্রদত্ত রাশিমালায়  $a$ র স্থানে  $c$  বসাইলে পাই

$$\begin{aligned} \text{রাশিমালাটি} &= (cb)^n - (bc)^n + (cd)^n - (dc)^n \\ &= (bc)^n - (bc)^n + (cd)^n - (cd)^n = 0. \end{aligned}$$

$\therefore$  এই রাশিমালাটি  $a - c$  দ্বারা বিভাজ্য।

অনুরূপে,  $b$ র স্থানে  $d$  বসাইয়া প্রমাণ করা যায় যে রাশিমালাটি  $b - d$  দ্বারা বিভাজ্য।

$\therefore$  প্রদত্ত রাশিমালাটি  $(a - c)$  ও  $(b - d)$ এর গুণফলের দ্বারাও অর্থাৎ  $ab - bc + cd - da$  দ্বারাও বিভাজ্য।

উদা. 9. Show that  $a^n(b - c) + b^n(c - a) + c^n(a - b)$  contains each of the factors  $a - b$ ,  $b - c$ ,  $c - a$ . [P. U. 1916]

$a - b$  এর মান শূন্য হইলে অর্থাৎ  $a = b$  হইলে যদি প্রদত্ত রাশিমালার মান শূন্য হয়, তবে  $a - b$  এই রাশিমালাটির উৎপাদক হইবে।

এক্ষণে প্রদত্ত রাশিতে  $a$ র স্থানে  $b$  বসাইয়া পাই

$$\begin{aligned} \text{প্রদত্ত রাশিমালা} &= b^n(b - c) + b^n(c - b) + c^n(b - b) \\ &= b^n(b - c) - b^n(b - c) + c^n \times 0 = 0, \end{aligned}$$

অতএব, প্রদত্ত রাশিমালাটির একটি গুণনীয়ক  $a - b$  হইল।

অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে  $b - c$  এবং  $c - a$  এই রাশিমালার গুণনীয়ক।

উদা. 10. For what value of  $m$  will  $2x^3 + 7x^2 - x + m$  and  $3x^3 + 10x - 11$  leave the same remainder when divided by  $x + 4$ ?

প্রদত্ত রাশি দুইটিকে  $x + 4$  দিয়া ভাগ করিয়া কি ভাগশেষ থাকে তাহা পাওয়া যাইবে এই রাশিদ্বয়ে  $x$ এর মান  $-4$  বসাইয়া।

$$\begin{aligned} \therefore \text{প্রথম রাশি হইতে ভাগশেষ} &= 2(-4)^3 + 7(-4)^2 - (-4) + m \\ &= -128 + 112 + 4 + m = -12 + m. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{দ্বিতীয় রাশি হইতে ভাগশেষ} &:: 3(-4)^2 + 10(-4) - 11 \\ &= 48 - 40 - 11 = -3.\end{aligned}$$

$$\text{ভাগশেষ দুইটি সমান, } \therefore -12 + m = -3, \therefore m = 9.$$

### Exercise 3

- ✓ 1. If  $f(a) = 2a^3 - 3a^2 + 5a + 6$ , find the value of
  - ✓ (i)  $f(2)$ , ✓ (ii)  $f(-1)$ , ✓ (iii)  $f(-3)$ , ✓ (iv)  $f(n)$ .
- ∞ 2. Find without actual division, the remainder in each of the following :—
  - (i)  $(x^3 + 2x^2 - 3x + 4) \div (x - 3)$
  - ✖ (ii)  $(2a^3 - 3a^2 + 5a + 7) \div (a + 2)$
  - ✓ (iii)  $(5x^3 + 9x^2 + 10) \div (x + 3)$
  - ✓ (iv)  $(3a^4 - 2a^3 + 5a^2 + a - 36) \div (a - 4)$
  - ✓ (v)  $(4x^3 + 3x^2 - 5x - 6) \div (2x + 1)$
- ✓ 3. Show that the first expression is exactly divisible by the second :—
  - ✓ (i)  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ ,  $x - 2$
  - (ii)  $x^{12} - 1$ ,  $x - 1$
  - ✓ (iii)  $2x^3 + 3x^2 - 5x + 12$ ,  $x + 3$
  - ✖ (iv)  $15x^3 - 4x^2 + 15x + 6$ ,  $3x + 1$
  - ✓ (v)  $6x^3 - 13x^2y + 8xy^2 - 3y^3$ ,  $2x - 3y$
  - ✖ (vi)  $a^{10} + b^{10}$ ,  $a + b$ .
- ✓ 4. Show that  $625x^4 - 16$  is exactly divisible by  $5x - 2$ .  
[ P. U. '21 ]
- ✓ 5. Show that  $(dx + by)^3 + (bx + ay)^3$  is divisible by  $a + b$  and also by  $x + y$ .  
[ C. U. '21 ]
- ✓ 6. For what value of  $m$  is  $x^3 + 6x^2 + 10x + m$  exactly divisible by  $x + 3$ ?

- ✓✓ 7. If  $x-2$  is a factor of  $120x^3-167x^2-ax+56$ , find the value of  $a$ . [ D. U. 1925 ]
- ✓✓ 8. If  $x^2-3ax+b^2$  is exactly divisible by  $x-a$ , show that  $2a^2=b^2$ .
- ✓ 9. If  $2x^3-7x^2+5x+p$  and  $3x^3-11x+17$  leave the same remainder when divided by  $x-3$ , find the value of  $p$ .
- ✓ 10. If  $n$  is a positive integer, show that  $9^n-1$  is always divisible by 8.
- ✓ 11. Shew that  $2x+3$  is a factor of  $6x^3+7x-3$ .
- ✓ 12. Prove that  $3^{4n}-4^{3n}$  is divisible by 17, if  $n$  be a positive integer.
- ✓ 13. If  $n$  be a positive even integer, shew that each of the last two digits in  $2^{8n}-6^{2n}$  is zero.
14. If  $n$  be a positive integer, shew that the last digit in  $3^{2n+1}+2^{2n+1}$  is 5.
- ✓ 15. Find the continued product of  $(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$ .
- ✓ 16. Find the condition that  $pa^n+qa^{-1}+ra^{n-2}+\dots+la+m$  is divisible by  $a-1$ .
- ✓ 17. Find the condition that  $x^2+px+q$  and  $x^2+p'x+q'$  may have a common factor of the form  $x+a$ .
18. If  $x+p$  be the H.C.F. of  $x^2+ax+b$  and  $x^2+a'x+b'$ , shew that  $p=\frac{b-b'}{a-a'}$ .
19. Show that  $a-b$ ,  $b-c$  and  $c-a$  are factors of  $a^2(b-c)^3+b^2(c-a)^3+c^2(a-b)^3$ .
20. If  $ax^3+bx^2+cx+d$  be divided by  $x-p$  until the remainder is independent of  $x$ , find the remainder without actually performing the division.
- Use the theorem to prove that  $x^6+ax^5+cx^3+dx^2-1$  is divisible by  $x+1$ , if  $a+c=d$ . [ A. U. 1913 ]

21. What must be the form of  $m$  so that  $a^m - x^m$  may have both  $a^n + x^n$  and  $a^n - x^n$  for divisors,  $n$  being any positive integer. [ M. U. 1875 ]

If  $n$  be a positive integer, show that  $x^n(y-z) + y^n(z-x) + z^n(x-y)$  is exactly divisible by  $(x-y)(y-z)(z-x)$ .

23. If  $x-p$  be the H. C. F. of  $ax^2+bx+c$  and  $cx^2+ax+b$ , show that  $a^3+b^3+c^3=3abc$ .

## Simultaneous Equations ( সহসমীকরণ )

### উদাহরণমালা 5

উদা. 1. Solve  $7x-3y=31$  } [ D. B. 1934 ]  
 $9x-5y=41$  }

$$7x-3y=31 \dots \dots (1)$$

$$9x-5y=41 \dots \dots (2)$$

(1)-কে 5 দ্বারা এবং (2)-কে 3 দ্বারা গুণ করিয়া পাই

$$35x-15y=155$$

$$\underline{27x-15y=123}$$

( বিয়োগ করিয়া )  $8x=32, \therefore x=4$ .

এক্ষে, (1)-এ  $x$  এর মান বসাইয়া পাই  $28-3y=31$ ,

বা,  $-3y=3, \therefore y=-1. \therefore$  নির্ণেয় সমাধান  $x=4, y=-1$ .

উদা. 2. Solve  $x+2y=3=4x-y$ . [ C. U. 1917 ]

$$\text{এখানে, } x+2y=3 \dots \dots (1)$$

$$\text{এবং } 4x-y=3 \dots \dots (2)$$

(2)-কে 2 দ্বারা গুণ করিয়া পাই  $8x-2y=6$

$$\bullet \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \text{এবং } \underline{x+2y=3 \dots \dots (1)}$$

$$\therefore \text{ (যোগ) } 9x=9, \therefore x=1.$$

এক্ষে (1) হইতে পাই  $1+2y=3$ , বা,  $2y=2, \therefore y=1$ .

$$\therefore x=1, y=1.$$

উদা. 3. Solve  $x+5y=36$

[ C. U. 1912 ]

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{5}{3}$$

$$x+5y=36 \dots (1), \quad \frac{x+y}{x-y} = \frac{5}{3} \dots (2)$$

(2) হইতে পাই  $5x-5y=3x+3y$ ,

বা,  $2x-8y=0$ , বা,  $x-4y=0 \dots (3)$ .

$$\text{এক্ষণে } x+5y=36$$

$$\text{এবং } x-4y=0$$

$$\therefore (\text{বিয়োগ}) \quad 9y=36, \quad \therefore y=4.$$

$$\text{এক্ষণে (1) হইতে } x+20=36, \quad \therefore x=36-20=16.$$

$$\therefore x=16, y=4.$$

$$\left. \begin{aligned} \text{উদা. 4. Solve } \frac{2}{x} + \frac{3}{y} &= 2 \dots (1) \\ \frac{5}{x} + \frac{10}{y} &= \frac{5}{6} \dots (2) \end{aligned} \right\}$$

(1)-কে 5 দ্বারা এবং (2)-কে 2 দ্বারা গুণ করিয়া পাই

$$\frac{10}{x} + \frac{15}{y} = 10$$

$$\frac{10}{x} + \frac{20}{y} = \frac{35}{3}$$

$$(\text{বিয়োগ}) \quad -\frac{5}{y} = -\frac{5}{3} \text{ বা, } \frac{5}{y} = \frac{5}{3} \quad \therefore y=3.$$

$$\text{এক্ষণে (1) হইতে, } \frac{2}{x} + \frac{3}{3} = 2, \text{ বা, } \frac{2}{x} = 2-1=1, \therefore x=2.$$

$$\text{অতএব, } x=2, y=3.$$

উদা. 5. Solve  $\frac{x+y}{xy}=2, \quad \frac{x-y}{xy}=1.$  [ D. B. '31 ]

$$\frac{x+y}{xy}=2 \dots (1), \quad \frac{x-y}{xy}=1 \dots (2).$$

(1) হইতে,  $\frac{x}{xy} + \frac{y}{xy} = 2$ , বা,  $\frac{1}{y} + \frac{1}{x} = 2 \dots\dots (3)$

(2) হইতে,  $\frac{x}{xy} - \frac{y}{xy} = 1$ , বা,  $\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = 1 \dots\dots (4)$

(3)+(4) করিয়া পাই,  $\frac{2}{y} = 3$ ,

বা,  $3y = 2$  (বজ্রগুণন)  $\therefore y = \frac{2}{3}$ .

আবার, (3)-(4) করিয়া পাই,  $\frac{2}{x} = 1$ ,  $\therefore x = 2$ .

অতএব,  $x = 2$ ,  $y = \frac{2}{3}$ .

উদা. 6. Solve  $23x + 17y = 63 \dots\dots (1)$   
 $17x + 23y = 57 \dots\dots (1)$

(1)+(2) করিয়া পাই,  $40x + 40y = 120$ ,

বা,  $x + y = 3 \dots\dots (3)$  [ উভয়পক্ষকে 40 দিয়া ভাগ করিয়া ]

আবার, (1)-(2) করিয়া পাই  $6x - 6y = 6$ ,

বা,  $x - y = 1 \dots\dots (4)$ .

এক্ষে, (3)+(4) করিয়া পাই  $2x = 4$ ,  $\therefore x = 2$

এবং (3)-(4) করিয়া পাই  $2y = 2$ ,  $\therefore y = 1$

উদা. 7. Solve  $\frac{x+2}{7} + \frac{y-x}{4} = 2x-8 \dots\dots (1)$   
 $\frac{2y-3x}{3} + 2y = 3x+4 \dots\dots (2)$  } [P. U. 1892]

(1)-কে 28 দিয়া গুণ করিয়া পাই,

$4x + 8 + 7y - 7x = 56x - 224$ , বা,  $-59x + 7y = -232 \dots (3)$

(2)-কে 3 দ্বারা গুণ করিয়া পাই  $2y - 3x + 6y = 9x + 12$ ,

বা,  $8y - 12x = 12$ , বা,  $-3x + 2y = 3 \dots\dots (4)$ .

এক্ষে (3)-কে 2 দ্বারা এবং (4)-কে 7 দ্বারা গুণ করিলে পাই

$-118x + 14y = -464$

$-21x + 14y = 21$

( বিয়োগ )  $-97x = -485$ ,  $\therefore x = \frac{-485}{-97} = 5$ .

এখন (4) হইতে,  $-15+2y=3$ , বা,  $2y=18$ ,  $\therefore y=9$ .  
অতএব,  $x=5$ ,  $y=9$ .

উদা. 8. Solve  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = a + b \dots (1)$

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} = 2 \dots (2)$$

(1)-কে  $a$  দ্বারা এবং (2)-কে  $a^2$  দ্বারা গুণ করিয়া পাই,

$$x + \frac{a}{b}y = a^2 + ab \dots (3)$$

$$\text{এবং } x + \frac{a^2}{b^2}y = 2a^2 \dots (4)$$

$$\therefore (\text{বিয়োগ}) \quad \frac{ab - a^2}{b^2} y = ab - a^2,$$

$$\therefore y = \frac{(ab - a^2) \times b^2}{(ab - a^2)} = b^2.$$

এক্ষণে (3) হইতে  $x + \frac{a}{b} \times b^2 = a^2 + ab$  [  $y$ -এর মান বসাইয়া ]

বা,  $x + ab = a^2 + ab$ ,  $\therefore x = a^2$ . অতএব,  $x = a^2$ ,  $y = b^2$ .

উদা. 9. Solve  $\begin{cases} x + 2y + 3z = 20 \dots (1) \\ 2x + 3y - 5z = -7 \dots (2) \\ 4x - 5y + 7z = 21 \dots (3) \end{cases}$

[C. U. 1898]

(1)-কে 2 দ্বারা গুণ করিয়া পাই,

$$2x + 4y + 6z = 40$$

$$\text{এবং (2) হইল } 2x + 3y - 5z = -7$$

$$\therefore (\text{বিয়োগ}) \quad y + 11z = 47 \dots (4)$$

আবার, (1)-কে 4 দ্বারা গুণ করিয়া পাই,

$$4x + 8y + 12z = 80$$

$$\text{এবং (3) হইল } 4x - 5y + 7z = 21$$

$$\therefore (\text{বিয়োগ}) \quad 13y + 5z = 59 \dots (5)$$

একশ্রে (4)-কে 13 দিয়া গুণ করিয়া পাই,

$$13y + 143z = 611$$

$$\text{এবং } 13y + 5z = 59 \quad \dots(5)$$

$$\therefore \text{ (বিয়োগ ) } 138z = 552, \quad \therefore z = \frac{552}{138} = 4.$$

$$\text{খন (4) হইতে } y + 44 = 47, \quad \therefore y = 47 - 44 = 3.$$

$$\text{আবার, (1) হইতে } x + 6 + 12 = 20, \quad \therefore x = 20 - 18 = 2.$$

$$\therefore x = 2, y = 3, z = 4$$

$$\begin{array}{lcl} \text{উদা. 10. Solve } & \left. \begin{array}{l} x + y = 5 \\ y + z = 7 \\ z + x = 6 \end{array} \right\} & \begin{array}{l} x + y = 5 \quad \dots(1) \\ y + z = 7 \quad \dots(2) \\ z + x = 6 \quad \dots(3) \end{array} \\ & & \therefore \text{ (যোগ ) } 2(x + y + z) = 18. \end{array}$$

$$\therefore x + y + z = 9 \dots(4)$$

$$\text{একশ্রে, (4) - (1) করিলে } z = 9 - 5 = 4,$$

$$(4) - (2) \text{ করিলে } x = 9 - 7 = 2,$$

$$\text{এবং (4) - (3) করিলে } y = 9 - 6 = 3, \quad \therefore x = 2, y = 3, z = 4.$$

$$\begin{array}{lcl} \text{উদা. 11. Solve } & \left. \begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 6 \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 7 \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = 5 \end{array} \right\} & \begin{array}{l} \dots\dots(1) \\ \dots\dots(2) \\ \dots\dots(3) \end{array} \end{array}$$

$$\therefore \text{ (যোগ করিয়া) } 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 18,$$

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 9. \dots\dots(4)$$

$$\text{একশ্রে, (4) - (1) করিয়া পাই } \frac{1}{z} = 3, \text{ বা, } 3z = 1, \quad z = \frac{1}{3}$$

$$(4) - (2) \quad \therefore \frac{1}{x} = 2, \text{ বা, } 2x = 1, \quad x = \frac{1}{2}$$

$$\text{এবং (4) - (3) } \therefore \frac{1}{y} = 4, \text{ বা, } 4y = 1, \quad y = \frac{1}{4}$$

$$\text{অতএব, } x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{4}, z = \frac{1}{3}$$



উদা. 12. Solve  $\frac{x+y}{xy} = \frac{8}{2} \dots (1), \frac{y+z}{yz} = \frac{5}{6} \dots (2), \frac{z+x}{zx} = 1\frac{1}{3} \dots (3)$

(1) হইতে পাই  $\frac{x}{xy} + \frac{y}{xy} = \frac{3}{2}$ , বা,  $\frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{3}{2} \dots (4)$

(2) " "  $\frac{y}{yz} + \frac{z}{yz} = \frac{5}{6}$ , বা,  $\frac{1}{z} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \dots (5)$

(3) " "  $\frac{z}{zx} + \frac{x}{zx} = \frac{4}{3}$ , বা,  $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{4}{3} \dots (6)$

---

(যোগ করিয়া)  $2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{11}{3},$

$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{11}{6} \dots (7).$

এক্ষণে, (7) - (4) করিয়া পাই  $\frac{1}{z} = \frac{11}{6} - \frac{3}{2} = \frac{1}{3}, \therefore z = 3$

(7) - (5) " "  $\frac{1}{x} = \frac{11}{6} - \frac{5}{6} = 1, \therefore x = 1$

এবং (7) - (6) " "  $\frac{1}{y} = \frac{11}{6} - \frac{4}{3} = \frac{1}{2}, \therefore y = 2$

অতএব,  $x = 1, y = 2, z = 3.$

উদা. 13. Solve  $\left. \begin{array}{l} 3x + 4y = 5xy \dots (1) \\ 3y + 5z = 6yz \dots (2) \\ 2z + 3x = 2zx \dots (3) \end{array} \right\}$

(1)-কে  $xy$  দ্বারা ভাগ করিয়া পাই

$\frac{3x}{xy} + \frac{4y}{xy} = 5$ , বা,  $\frac{3}{y} + \frac{4}{x} = 5 \dots (4)$

অতঃপরে, (2)-কে  $yz$  দ্বারা ভাগ করিয়া পাই

$\frac{3}{z} + \frac{5}{y} = 6 \dots (5)$

(3)-কে  $zx$  দ্বারা ভাগ করিয়া পাই  $\frac{2}{x} + \frac{3}{z} = 2 \dots (6)$

এক্ষণে, (5) - (6) করিয়া পাই

$$\frac{y}{y} - \frac{z}{x} = 4 \dots (7)$$

আবার, (4)  $\times 1$  এবং (7)  $\times 2$  করিয়া পাই

$$\frac{3}{y} + \frac{4}{x} = 5$$

$$\text{এবং } \frac{10}{y} - \frac{4}{x} = 8$$

$$(\text{যোগ}) \frac{13}{y} = 13, \quad \text{বা, } 13y = 13, \quad \therefore y = 1.$$

$$\text{এক্ষণে, (4) হইতে পাই } 3 + \frac{4}{x} = 5, \quad \text{বা, } \frac{4}{x} = 2,$$

$$\text{বা, } 2x = 4, \quad \therefore x = 2.$$

$$\text{এবং (5) হইতে পাই } \frac{3}{z} + 5 = 6, \quad \text{বা, } \frac{3}{z} = 1, \quad \therefore z = 3.$$

$$\therefore x = 2, y = 1, z = 3.$$

উদা. 14. Solve  $\frac{xy}{x+y} = \frac{6}{5}, \frac{yz}{y+z} = \frac{12}{7}$  and  $\frac{zx}{z+x} = \frac{4}{3}.$

[ এখানে সমীকরণগুলিকে উল্টাইয়া যথাক্রমে  $\frac{x+y}{xy} = \frac{5}{6}, \frac{y+z}{yz} = \frac{7}{12},$   
 $\frac{z+x}{zx} = \frac{3}{4}$  এইভাবে লেখা যায়। তারপর 12নং উদাহরণের মত সমাধান কর।

উত্তর:  $x=2, y=3, z=4$  ]

উদা. 15. Solve  $\frac{x+y}{xy} = \frac{y+z}{yz} = \frac{z+x}{zx} = \frac{2}{5}.$

$$\frac{x+y}{xy} = \frac{2}{5}, \quad \text{বা, } \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{2}{5} \dots (1)$$

$$\frac{y+z}{yz} = \frac{2}{5}, \quad \text{বা, } \frac{1}{z} + \frac{1}{y} = \frac{2}{5} \dots (2)$$

$$\frac{z+x}{zx} = \frac{2}{5}, \quad \text{বা, } \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{5} \dots (3)$$

$$(\text{যোগ}) 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{6}{5}, \quad \therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{5} \dots (4)$$

এখন, (4)-(1) করিয়া পাই  $\frac{1}{z} = \frac{1}{5}$ ,  $\therefore z = 5$

(4)-(2) „ „  $\frac{1}{x} = \frac{1}{5}$ ,  $\therefore x = 5$

(4)-(3) „ „  $\frac{1}{y} = \frac{1}{5}$ ,  $\therefore y = 5$

অতএব,  $x = y = z = 5$

উদা. 16. Solve  $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ ,  $a^2x + b^2y + c^2z = a^3 + b^3 + c^3$ .

এখানে,  $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k$  ( মনে কর )

$\therefore x = ak, y = bk, z = ck \dots\dots (A)$

অতএব, দ্বিতীয় সমীকরণটি হইতে পাই  $a^2k + b^2k + c^2k = a^3 + b^3 + c^3$ ,

বা,  $(a^3 + b^3 + c^3)k = a^3 + b^3 + c^3$ ,

$\therefore k = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{a^3 + b^3 + c^3} = 1$ .

অতএব,  $k$ -এর মান বসাইয়া (A) হইতে পাই  $x = a, y = b, z = c$ .

উদা. 17. Solve  $a(x+y) = b(x-y) = 2ab$ . [C. U. 1930]

এখানে,  $a(x+y) = 2ab \dots\dots (1)$

এবং  $b(x-y) = 2ab \dots\dots (2)$

(1) হইতে  $x+y = 2b$  ( উভয় পক্ষকে  $a$  দ্বারা ভাগ করিয়া )  $\dots\dots (3)$

(2) „  $x-y = 2a$  ( „ „ „ „ „ )

$\therefore$  ( যোগ )  $2x = 2(a+b)$ ,  $\therefore x = a+b$ .

এক্ষে, (3) হইতে  $a+b+y = 2b$ ,  $\therefore y = 2b - b - a = b - a$ .

অতএব,  $x = a+b, y = b-a$ .

উদা. 18. Solve  $xy = 12 \dots (1)$ ,  $yz = 20 \dots (2)$  and  $zx = 15 \dots (3)$

সমীকরণ তিনটি গুণ করিলে পাই  $x^2y^2z^2 = 12 \times 20 \times 15 = 3600$ .

$\therefore xyz \sqrt{3600} = \pm 60 \dots (4)$ .

এক্ষে, (4)  $\div$  (1) করিয়া  $\frac{xyz}{xy} = \pm \frac{60}{12}$ , বা,  $z = \pm 5$ .

অতঃপরে (4)  $\div$  (2) করিয়া  $x = \pm 3$  এবং (4)  $\div$  (3) করিয়া  $y = \pm 4$ .

অতএব,  $x = \pm 3, y = \pm 4, z = \pm 5$ .

### 16. বজ্রগুণন প্রণালী (Method of cross-multiplication):

যদি তিনটি সমীকরণের মধ্যে দুইটির মান 0 হয়, তবে এই প্রণালীতে সমাধান সহজ হয়। সেই দুইটি সমীকরণ লইয়া এইভাবে লিখিবে :

$$\frac{x}{(y\text{এর সহগ} \times z\text{এর সহগ}) - (z\text{এর সহগ} \times y\text{এর সহগ})}$$

$$\frac{y}{(z\text{এর সহগ} \times x\text{এর সহগ}) - (x\text{এর সহগ} \times z\text{এর সহগ})}$$

$$\frac{z}{(x\text{এর সহগ} \times y\text{এর সহগ}) - (y\text{এর সহগ} \times x\text{এর সহগ})}$$

কিন্তু এখানে মনে রাখিতে হইবে যে, প্রত্যেক বন্ধনীর মধ্যে প্রথমে যার সহগ আছে সর্বদা উপরের সমীকরণ হইতে তাহা লইতে হইবে এবং  $\times$  চিহ্নের পর যার সহগ আছে, সর্বদা তাহা নীচের সমীকরণ হইতে লইতে হইবে। পরবর্তী উদাহরণ হইতে ইহা বুঝিয়া লও।

উদাহরণ : উপরের প্রণালীটি সম্বন্ধে নিম্নে প্রমাণ দেখান হইতেছে।

$ax + by + cz = 0 \dots\dots(1)$  এবং  $a_1x + b_1y + c_1z = 0 \dots\dots(2)$  এই সমীকরণ দুইটি লওয়া হইল।

(1)-কে  $c_1$  দ্বারা এবং (2)-কে  $c$  দ্বারা গুণ করিয়া পাই

$$ac_1x + bc_1y + cc_1z = 0 \dots (3)$$

$$\text{এবং } a_1cx + b_1cy + cc_1z = 0 \dots (4)$$

এক্ষণে (4) - (3) করিয়া পাই  $(a_1c - ac_1)x + (b_1c - bc_1)y = 0$

$$\text{বা, } (a_1c - ac_1)x = (bc_1 - b_1c)y$$

$$\therefore \frac{x}{bc_1 - b_1c} = \frac{y}{a_1c - ac_1} \dots (5)$$

আবার, (1)-কে  $a_1$  এবং (2)-কে  $a$  দ্বারা গুণ করিয়া পাই

$$aa_1x + ab_1y + a_1cz = 0 \dots (6)$$

$$\text{এবং } aa_1x + ab_1y + ac_1z = 0 \dots (7)$$

এক্ষণে (7) - (6) করিয়া পাই  $(ab_1 - a_1b)y + (ac_1 - a_1c)z = 0$ ,

$$\text{বা, } (ab_1 - a_1b)y = (a_1c - ac_1)z$$

$$\therefore \frac{y}{a_1c-ac_1} = \frac{z}{ab_1-a_1b} \dots\dots(8)$$

$$\therefore (5) \text{ ও } (8) \text{ হইতে পাই } \frac{x}{bc_1-b_1c} = \frac{y}{a_1c-ac_1} = \frac{z}{ab_1-a_1b}$$

উদা. 19. Solve 
$$\begin{cases} x-2y+z=0 \dots\dots(1) \\ 3x+6y-5z=0 \dots\dots(2) \\ 2x+3y+4z=20 \dots\dots(3) \end{cases}$$

(1) ও (2) হইতে বজ্রগুণন প্রণালী দ্বারা পাই

$$\frac{x}{(-2 \times -5) - (1 \times 6)} = \frac{y}{(1 \times 3) - (1 \times -5)} = \frac{z}{(1 \times 6) - (-2 \times 3)}$$

বা,  $\frac{x}{10-6} = \frac{y}{3+5} = \frac{z}{6+6}$ , বা,  $\frac{x}{4} = \frac{y}{8} = \frac{z}{12}$

বা,  $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} = k$  (মনে কর)

সুতরাং  $x=k, y=2k, z=3k \dots\dots(A)$

এখন, (3) হইতে পাই  $2k+6k+12k=20$ ,

বা,  $20k=20, \therefore k=1$ .

$\therefore (A)$  হইতে  $k$  এর মান বসাইয়া পাই  $x=1, y=2, z=3$ .

উদা. 20. Solve 
$$\begin{cases} x+y+z=0 \dots\dots(1) \\ ax+by+cz=0 \dots\dots(2) \\ \frac{x}{b-c} + \frac{y}{c-a} + \frac{z}{a-b} = 3 \dots\dots(3) \end{cases}$$

(1) ও (2) হইতে বজ্রগুণন প্রণালী দ্বারা পাওয়া যায়

$$\frac{x}{c-b} = \frac{y}{a-c} = \frac{z}{b-a} \quad \text{বা,} \quad \frac{x}{-(b-c)} = \frac{y}{-(c-a)} = \frac{z}{-(a-b)}$$

বা,  $\frac{x}{b-c} = \frac{y}{c-a} = \frac{z}{a-b} = k$  (মনে কর)

$\therefore x=k(b-c), y=k(c-a), z=k(a-b) \dots\dots(4)$ .

এখনে (3) হইতে পাই  $\frac{k(b-c)}{b-c} + \frac{k(c-a)}{c-a} + \frac{k(a-b)}{a-b} = 3$ ,

বা,  $k+k+k=3$ , বা,  $3k=3, \therefore k=1$ .

অতএব, (4) হইতে  $x=b-c, y=c-a, z=a-b$ .

উদা. 21.

$$\text{Solve } x+y+z=0 \dots\dots(1)$$

$$bcx+ cay+ abz=0 \dots\dots(2)$$

$$ax+by+cz+(b-c)(c-a)(a-b)=0 \dots\dots(3)$$

এখানে (3)টিকে  $ax+by+cz=-(b-c)(c-a)(a-b) \dots\dots(4)$  লিখা যায়।

(1) ও (2) হইতে বর্জগুণন প্রণালী দ্বারা পাই

$$\frac{x}{ab-ca} = \frac{y}{bc-ab} = \frac{z}{ca-bc}$$

$$\text{বা, } \frac{x}{a(b-c)} = \frac{y}{b(c-a)} = \frac{z}{c(a-b)} = k \text{ ( মনে কর )}$$

$$\therefore x=a(b-c)k, y=b(c-a)k, z=c(a-b)k \dots\dots(A)$$

এক্ষণে, (4) হইতে  $x, y, z$  এর মান বসাইয়া পাই

$$a^2(b-c)k+b^2(c-a)k+c^2(a-b)k=-(b-c)(c-a)(a-b)$$

$$\text{বা, } k\{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\}=-(b-c)(c-a)(a-b)$$

$$\text{বা, } -(a-b)(b-c)(c-a)k=-(b-c)(c-a)(a-b)$$

$$\therefore k=1.$$

অতএব, (A) হইতে  $x=a(b-c), y=b(c-a), z=c(a-b)$ .

$$\text{উদা. 22. Solve } 24x=15y=40z \dots\dots(1) \quad \left. \begin{array}{l} \text{and } 3x+y+2z=29 \dots\dots(2) \end{array} \right\}$$

(1)-এর প্রত্যেক পদকে 24, 15, ও 40 এর ল. সা. গু. 120 দ্বারা ভাগ

$$\text{করিয়া পাই } \frac{x}{5} = \frac{y}{8} = \frac{z}{3} = k \text{ ( মনে কর )}$$

$$\therefore x=5k, y=8k, z=3k \dots\dots(A)$$

এক্ষণে, (2) হইতে পাই  $15k+8k+6k=29$ ,

$$\text{বা, } 29k=29, \therefore k=1.$$

অতএব, (A) হইতে  $x=5, y=8, z=3$ .

$$\text{উদা. 23. Solve } \left. \begin{array}{l} x+y+z=a+b+c \dots\dots(1) \\ ax+by+cz=a^2+b^2+c^2 \dots\dots(2) \\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=3 \dots\dots(3) \end{array} \right\}$$

$$(1) \text{ হইতে } (x-a)+(y-b)+(z-c)=0 \dots\dots(4)$$

$$(2) \text{ হইতে } (ax-a^2)+(by-b^2)+(cz-c^2)=0,$$

$$\text{বা } a(x-a)+b(y-b)+c(z-c)=0 \dots\dots(5)$$

(4) ও (5) হইতে বজ্রগুণন প্রণালী দ্বারা পাই

$$\frac{x-a}{c-b} = \frac{y-b}{a-c} = \frac{z-c}{b-a} = k \text{ (যদি } k \text{ হয়)}$$

$$\text{অতএব, } x-a=k(c-b), y-b=k(a-c), z-c=k(b-a) \dots(A)$$

এক্ষণে, (3) হইতে পক্ষান্তর করিয়া পাই

$$\frac{x}{a}-1+\frac{y}{b}-1+\frac{z}{c}-1=0, \text{ বা, } \frac{x-a}{a}+\frac{y-b}{b}+\frac{z-c}{c}=0,$$

$$\text{বা, } \frac{k(c-b)}{a}+\frac{k(a-c)}{b}+\frac{k(b-a)}{c}=0$$

[  $x-a, y-b, z-c$  এর মান বসাইয়া ]

$$\text{বা, } k\left(\frac{c-b}{a}+\frac{a-c}{b}+\frac{b-a}{c}\right)=0, \therefore k=0.$$

$$\text{অতএব, (A) হইতে পাই, } \left. \begin{array}{l} x-a=0, \therefore x=a \\ y-b=0, \therefore y=b \\ z-c=0, \therefore z=c \end{array} \right\} \text{ (উত্তর)}$$

$$\text{উদা. 24. Solve } \left. \begin{array}{l} \frac{2}{x}+\frac{5}{y}-\frac{3}{z}=0 \dots\dots(1) \\ \frac{3}{x}-\frac{12}{y}+\frac{2}{z}=0 \dots\dots(2) \\ 4x+y+3z=4 \dots(3) \end{array} \right\}$$

$$(1) \text{ হইতে } 2.\frac{1}{x}+5.\frac{1}{y}-3.\frac{1}{z}=0$$

$$(2) \text{ ,, } 3.\frac{1}{x}-12.\frac{1}{y}+2.\frac{1}{z}=0,$$

উহা হইতে বজ্রগুণন প্রণালীতে পাওয়া যায়

$$\frac{\frac{1}{x}}{(5 \times 2) - (-3 \times -12)} = \frac{\frac{1}{y}}{(-3 \times 3) - (2 \times 2)} = \frac{\frac{1}{z}}{(2 \times -12) - (5 \times 3)}$$

বা,  $\frac{1}{-26} = \frac{1}{-13} = \frac{1}{-39}$ , বা,  $\frac{1}{2} = \frac{1}{1} = \frac{1}{3} = k$  (মনে কর)

অতএব,  $\frac{1}{x} = 2k$ ,  $\frac{1}{y} = k$ ,  $\frac{1}{z} = 3k$ ,

বা,  $x = \frac{1}{2k}$ ,  $y = \frac{1}{k}$ ,  $z = \frac{1}{3k}$  .....(A)

এক্ষে, (3) হইতে পাই  $4 \cdot \frac{1}{2k} + \frac{1}{k} + 3 \cdot \frac{1}{3k} = 4$ ,

বা,  $\frac{2}{k} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = 4$ , বা,  $\frac{4}{k} = 4$ ,  $\therefore k = 1$ .

$\therefore$  (A) হইতে  $x = \frac{1}{2}$ ,  $y = 1$ ,  $z = \frac{1}{3}$ .

উদা. 25. Solve  $x(x+y+z) = 6 \dots (1)$ ,  $y(x+y+z) = 12 \dots (2)$   
 $z(x+y+z) = 18 \dots (3)$ .

সমীকরণ তিনটি যোগ করিয়া পাই  $(x+y+z)(x+y+z) = 36$ ,

বা,  $(x+y+z)^2 = 36$ ,  $\therefore x+y+z = \pm 6 \dots (4)$

এক্ষণে,  $\left. \begin{array}{l} (1) \text{কে } (4) \text{ দ্বারা ভাগ করিয়া পাই } x = \pm 1 \\ (2) \text{কে } (4) \text{ " " " } y = \pm 2 \\ (3) \text{কে } (4) \text{ " " " } z = \pm 3 \end{array} \right\} \text{ (উত্তর)}$

উদা. 26. Solve  $\left. \begin{array}{l} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 3 \dots (1) \\ \frac{2}{x-1} + \frac{3}{y-2} = 5 \dots (2) \end{array} \right\} \text{ [ A. U. '42 ]}$

(1)  $\times 2$  করিয়া পাই

$$\frac{2}{x-1} + \frac{2}{y-2} = 6$$

এবং  $\frac{2}{x-1} + \frac{3}{y-2} = 5 \dots (2)$

(বিয়োগ করিয়া)  $-\frac{1}{y-2} = 1$ , বা,  $y-2 = -1$ ,  $\therefore y = 2-1 = 1$ .



এক্ষণে (1) হইতে  $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{1-2} = 3$ ,

বা,  $\frac{1}{x-1} - 1 = 3$ , বা,  $\frac{1}{x-1} = 4$ ,

বা,  $4x - 4 = 1$ , বা,  $4x = 5$ ,  $\therefore x = \frac{5}{4}$ .

$\therefore x = 1\frac{1}{4}$ ,  $y = 1$ .

মন্তব্য

উদা. 27. In the cyclic quadrilateral ABCD,  $\angle A = (2x + 13)$  degrees,  $\angle B = (2y - 18)$  degrees,  $\angle C = (y + 31)$  degrees,  $\angle D = (3x - 29)$  degrees. Find the values of  $x$  and  $y$ .

[ P. U. 1932 ]

$\therefore$  বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় = 2 সমকোণ = 180 ডিগ্রী,

$\therefore \angle A + \angle C = 180^\circ$  এবং  $\angle B + \angle D = 180^\circ$ ,

$\therefore 2x + 13 + y + 31 = 180 \dots\dots(1)$

এবং  $3x - 29 + 2y - 18 = 180 \dots\dots(2)$

(1) হইতে  $2x + y = 136 \dots\dots(3)$

এবং (2) হইতে  $3x + 2y = 227 \dots\dots(4)$

(3) ও (4) সমাধান করিলে পাই  $x = 45$ ,  $y = 46$ .

$\therefore x$  এর মান  $45^\circ$ ,  $y$  এর মান  $46^\circ$ .

উদা. 28. Solve  $a(y+z) = yz \dots\dots(1)$   
 $b(z+x) = zx \dots\dots(2)$   
 $c(x+y) = xy \dots\dots(3)$

(1) হইতে পাই  $\frac{y+z}{yz} = \frac{1}{a}$ , বা  $\frac{1}{z} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a} \dots\dots(4)$

(2) " "  $\frac{z+x}{zx} = \frac{1}{b}$ , বা  $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{b} \dots\dots(5)$

(3) " "  $\frac{x+y}{xy} = \frac{1}{c}$ , বা  $\frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{1}{c} \dots\dots(6)$

$\therefore 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \dots\dots(7)$

এক্ষণে, (7) - (4) করিয়া পাই  $\frac{1}{x} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right) = \frac{ac + ab - bc}{2abc}$

$$\therefore x = \frac{2abc}{ab + ac - bc};$$

(7) - (5) "  $\frac{1}{y} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{c} + \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right),$

$$\therefore y = \frac{2abc}{ab + bc - ac};$$

এবং (7) - (6) "  $\frac{1}{z} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right),$

$$\therefore z = \frac{2abc}{bc + ac - ab}.$$

উদ। 29. Eliminate  $t$  from the equations

$$x = t + \frac{1}{t}, \quad y^2 = t^2 + \frac{1}{t^2}. \quad [D. B. '32]$$

এখানে  $x^2 = \left( t + \frac{1}{t} \right)^2 = t^2 + \frac{1}{t^2} + 2.t.\frac{1}{t} = t^2 + \frac{1}{t^2} + 2 = y^2 + 2.$

অতএব,  $t$  বর্জন করিয়া সমীকরণটি হইল  $x^2 - y^2 = 2.$

### Exercise 4

Solve :—

1.  $\begin{cases} 3x + 5y = 69 \\ x - 2y = 1 \end{cases} [C. U. '19]$  2.  $\begin{cases} 6x - 7y = 16 \\ 9x - 5y = 35 \end{cases} [C. U. '22]$

3.  $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{2}{y} = 1 \\ \frac{x}{4} + \frac{3}{y} = 3 \end{cases} [A. U. '23]$  4.  $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + z = 4 \\ 4x + 5y + z = 16 \end{cases} [C. U. '11]$

5. (a)  $\begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{10}{y} = 2 \\ \frac{8}{x} + \frac{2}{y} = \frac{19}{20} \end{cases}$  5. (b)  $\begin{cases} 3x + 4y = 11 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases} [W. B. S. F. '53]$

$$6. \frac{2x+2y-3}{5} = \frac{3x-7y+4}{6} = \frac{8y+x+2}{7}. \quad [C. U. '14]$$

$$7. \left. \begin{array}{l} y+z=6 \\ z+x=4 \\ x+y=2 \end{array} \right\} [C. U. '18] \quad 8. \left. \begin{array}{l} 6y-x=1 \\ x+y=3 \\ x-y=2 \end{array} \right\} [C. U. '31]$$

$$9. \frac{x+y}{xy} = 5, \quad \frac{x-y}{xy} = 9. \quad [C. U. '32]$$

$$10. \left. \begin{array}{l} \frac{5}{x} + 3y = 8 \\ \frac{4}{x} - 10y = 56 \end{array} \right\} [D. B. '39] \quad 11. \left. \begin{array}{l} 23x-24y=21 \\ 25x-16y=43 \end{array} \right\} [D. B. '36]$$

$$12. \frac{x+y}{xy} = \frac{y+z}{yz} = \frac{z+x}{zx} = \frac{2}{3} \quad \sqrt{13. \left. \begin{array}{l} x-2y+z=0 \\ 9x-8y+3z=0 \\ 2x+3y+5z=36 \end{array} \right\}}$$

$$14. \left. \begin{array}{l} 8x=8y=10z \\ 5x-4y+z=12 \end{array} \right\} \quad 15. \quad xy=24, \quad yz=42, \quad zx=28.$$

$$16. \left. \begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 6a \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{x} = 10a \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -2a \end{array} \right\} \quad \sqrt{17. \left. \begin{array}{l} (a) \quad \begin{array}{l} 2x-5y-3z=0 \\ 3x+3y-z=0 \\ -x+2y+5z=11 \end{array} \\ \frac{7x+y}{5y-z} = \frac{11y-z}{6x-z} = \frac{5x-y}{z+1} = 2 \end{array} \right\}$$

$$18. \left. \begin{array}{l} \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \\ ax+by+cz=a^2+b^2+c^2 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} ax+by+cz=0 \\ a^2x+b^2y+c^2z=0 \\ x+y+z+(a-b)(b-c)(c-a)=0 \end{array} \right\}$$

$$20. \left. \begin{array}{l} \frac{x}{4} = \frac{y}{8} = \frac{z}{8} \\ 4x+3y+z=30 \end{array} \right\} \quad \sqrt{21. \left. \begin{array}{l} x+y=3xy \\ y+z=5yz \\ z+x=4zx \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} (22) \quad \frac{3}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3}{z} &= 0 \\ \frac{5}{x} - \frac{6}{y} + \frac{2}{z} &= 0 \\ 2x + 3y + 4z &= 6 \end{aligned} \right\}$$

[ D. B. '33 ]

$$(23) \quad \frac{x+ca}{b(c+a)} = \frac{y+ba}{c(b+a)} = \frac{z+ab}{a(c+b)} = \frac{x+y+z}{ab+bc+ca}$$

[ Hints : প্রথম তিনটি হাইটসি addendo পাই

$$\text{Each} = \frac{x+y+z+ab+ac+bc}{2(ab+bc+ca)} = \frac{x+y+z}{ab+bc+ca}$$

$$\therefore \text{Each} = \frac{x+y+z+ab+bc+ca-x-y-z}{2(ab+bc+ca)-(ab+bc+ca)} = 1.$$

এক্ষেপে, প্রতিটি = 1 ধরিয়া সমাধান কর। ]

$$(24) \quad x(y+z)=5, y(z+x)=8, z(x+y)=9.$$

$$(25) \quad ax+by=1, bx+ay=\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} \neq 1.$$

[ D. B. '51 ]

[ Hints : সমীকরণ দুইটি যোগ করিয়া  $x+y=\frac{a+b}{a^2+b^2}$  এবং বিয়োগ

করিয়া  $x-y=\frac{a-b}{a^2+b^2}$  হয়। এই দুইটি আবার যোগ ও বিয়োগ কর...

$$26. \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3, y+z=5yz, z+x=4xz. \quad [ A. U. '43 ]$$

$$27. \quad \left. \begin{aligned} ax+by &= c \\ bx+ay &= 1+c \end{aligned} \right\} \quad [ E. B. S. B. '52 ]$$

$$28. \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad \frac{z}{c} + \frac{x}{a} = 1. \quad [ U. U. '48 ]$$

[ Hints : সমীকরণ তিনটি যোগ করিয়া পাই  $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) = 3,$

$$\therefore \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \frac{3}{2}.$$

$$(29) \quad \left. \begin{aligned} 3x+4y-11 &= 0 \\ 5y-6z &= 8 \\ 7z-8x-13 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

[ C. U. 1877 ]

$$\left. \begin{array}{l} 30. \quad x+5y-4z=5 \\ \quad \quad 3x-2y+2z=14 \\ \quad \quad -10x+8y+z=6 \end{array} \right\}$$

[ C. U. 1867 ]

$$\left. \begin{array}{l} 31. \quad \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 12 - \frac{1}{6}z \\ \quad \quad \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z - \frac{1}{6}x = 8 \\ \quad \quad \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}z = 10 \end{array} \right\}$$

[ C. U. 1868 ]

$$\left. \begin{array}{l} \checkmark 32. \quad x - y - z = -15 \\ \quad \quad y + x + 2z = 40 \\ \quad \quad 5x - 6y = -150 \end{array} \right\}$$

[ C. U. 1886 ]

$$\left. \begin{array}{l} 33. \quad 5x-3y+16z=0 \\ \quad \quad 4x+7y=6z \\ \quad \quad 3x-2y+19z=9 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 34. \quad x+y=axy \\ \quad \quad z+x=bzx \\ \quad \quad z+y=cyz \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 35. \quad y - px + p^2z = p^3 \\ \quad \quad y - qx + q^2z = q^3 \\ \quad \quad y - mx + m^2z = m^3 \end{array} \right\}$$


---

## Problems on Equations

17. অনেক বিবিধ প্রশ্ন Algebra-র সাহায্যে সহজে সমাধান করা যায়। প্রশ্নে যদি একের অধিক অজ্ঞাত রাশি থাকে, তবে তাহাদের স্থানে  $x, y, z$  প্রভৃতি ধাকিয়ে নিয়ে সমাধানগুলি দেখ।

### উদাহরণ 6

উদা. 1. Twenty years ago a father was 4 times as old as his son and 4 years hence he will be twice as old as his son. What are their present ages ? [ C. U. 1940 ]

মনে কর, পিতার ও পুত্রের বর্তমান বয়স যথাক্রমে  $x$  ও  $y$  বৎসর। প্রদত্ত সর্তব্য হইতে পাই,  $x - 20 = 4(y - 20) \dots (1)$  এবং  $x + 4 = 2(y + 4) \dots (2)$ .

(1) হইতে  $x - 4y = -60 \dots (3)$  এবং (2) হইতে  $x - 2y = 4 \dots (4)$ .

(3) - (4) করিয়া পাই  $-2y = -64$ ,  $\therefore y = 32$ . আবার, (4) হইতে পাই  $x = 4 + 64 = 68$ .  $\therefore$  পিতার বয়স 68 বৎসর ও পুত্রের বয়স 32 বৎসর।

উদা. 2. Add 1 to the numerator and the denominator of a certain fraction and it reduces to  $\frac{4}{5}$ ; subtract 5 from each and it reduces to  $\frac{1}{2}$ ; find the fraction. [ C. U. 1916 ]

মনে কর, ভগ্নাংশটি  $\frac{x}{y}$ .

প্রদত্ত সর্তব্য হইতে পাই  $\frac{x+1}{y+1} = \frac{4}{5} \dots (1)$  এবং  $\frac{x-5}{y-5} = \frac{1}{2} \dots (2)$

(1) হইতে  $5x + 5 = 4y + 4$ , বা,  $5x - 4y = -1 \dots (3)$

এবং (2) হইতে  $2x - 10 = y - 5$ , বা,  $2x - y = 5 \dots (4)$

এখন (3)  $\times 1$  ও (4)  $\times 4$  করিয়া পাই

$$5x - 4y = -1$$

$$8x - 4y = 20$$

(বিয়োগ)  $-3x = -21$ .  $\therefore x = 7$ , এবং (4) হইতে  $14 - y = 5$ .

বা,  $-y = -9$ ,  $\therefore y = 9$ .  $\therefore$  নির্ণেয় ভগ্নাংশ  $= \frac{7}{9}$ .

উদা. 3. Find the fraction which reduces to  $\frac{1}{3}$  when 1 is added to its denominator, and  $\frac{1}{3}$  when 2 is subtracted from its numerator. [ D. B. 1932 ]

মনে কর, ভগ্নাংশটি  $\frac{x}{y}$ . প্রদত্ত সর্ত হইতে পাই,  $\frac{x}{y+1} = \frac{1}{2} \dots (1)$  এবং  $\frac{x-2}{y} = \frac{1}{3} \dots (2)$ . (1) হইতে  $2x - y = 1 \dots (3)$  এবং (2) হইতে  $3x - y = 6 \dots (4)$   
 (3) ও (4) সমীকরণদ্বয় সমাধান করিলে পাই  $x = 5, y = 9$ .  
 $\therefore$  নির্ণেয় ভগ্নাংশ =  $\frac{5}{9}$ .

উদা. 4. A says to B, "I am twice as old as you were when I was as old as you are." The sum of their present ages is 63. Find their ages. [ A. U. '31 ]

মনে কর, A ও Bর বর্তমান বয়স যথাক্রমে  $x$  ও  $y$  বৎসর।

প্রদত্ত সর্তদ্বয় হইতে পাই  $x + y = 63 \dots (1)$

এবং  $x = 2\{y - (x - y)\} \dots (2)$

(2) হইতে পাই  $x = 4y - 2x$ , বা,  $3x - 4y = 0 \dots (3)$ .

এখন (1) ও (3) সমাধান করিলে পাই  $y = 27$ .  $\therefore x = 63 - 27 = 36$ .

অতএব, A-র বয়স 36 বৎসর এবং B-র বয়স 27 বৎসর।

\*[ A অপেক্ষা Bর বয়স  $(x - y)$  বৎসর কম।  $\therefore$  A-র বয়স যখন  $y$  বৎসর ছিল তখন B-র বয়স ছিল  $y - (x - y)$  বৎসর। ]

উদা. 5. Nine chairs and 5 tables cost Rs. 90, while 5 chairs and 4 tables cost Rs. 61. Find the price of 6 chairs and 3 tables. [ P. U. '30 ]

মনে কর, একখানি চেয়ারের মূল্য  $x$  টাকা এবং একটি টেবিলের মূল্য  $y$  টাকা। এখন প্রদত্ত সর্ত হইতে  $9x + 5y = 90 \dots (1)$

এবং  $5x + 4y = 61 \dots (2)$ . সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া পাই  $x = 5$  এবং  $y = 9$ .

$\therefore$  6টি চেয়ার ও 3টি টেবিলের মূল্য =  $5 \times 6$  টাকা +  $9 \times 3$  টাকা = 57 টাকা।

উদা. 6. The area of a floor is 192 sq. ft. Had each of the sides been 2 ft. longer, the area would have been increased by 60 sq. ft. Find the sides of the floor. [C. U. 1924]

মনে কর, দৈর্ঘ্য  $x$  এবং প্রস্থ  $y$  ফুট। প্রদত্ত সর্ত হইতে পাই  
 $xy = 192 \dots (1)$  এবং  $(x+2)(y+2) = 192 + 60 \dots (2)$

(2) হইতে পাই  $xy + 2x + 2y = 248$ ,

বা,  $192 + 2(x+y) = 248$ , বা,  $2(x+y) = 56$ , বা  $x+y = 28 \dots (3)$ .

এখন  $(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy = 28^2 - 4 \times 192 = 16$ ,

$\therefore x-y = 4 \dots (4)$  (3) ও (4) সমাধান করিয়া পাই  $x = 16$ ,  $y = 12$ .

$\therefore$  নির্ণেয় দৈর্ঘ্য = 16 ফুট, প্রস্থ = 12 ফুট।

উদা. 7. The perimeter of a rectangular courtyard is 60 ft. If the length is increased by 3 ft. and the width be decreased by 3 ft., the area is decreased by 21 sq. ft. Find the dimensions of the courtyard. [ C. U. 1927 ]

মনে কর, দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে  $x$  ও  $y$  ফুট। প্রথম সর্ত হইতে  
 $2(x+y) = 60$ , বা,  $x+y = 30 \dots (1)$ , দ্বিতীয় সর্ত হইতে  $(x+3)(y-3)$

$= xy - 21$ , বা,  $xy - 3x + 3y - 9 = xy - 21$ , বা,  $x - y = 4 \dots (2)$

এখন (1) ও (2) সমাধান করিয়া পাই  $x = 17$ ,  $y = 13$ .

$\therefore$  নির্ণেয় দৈর্ঘ্য = 17 ফুট এবং প্রস্থ = 13 ফুট।

## 18. Digits সম্বন্ধীয় সমাধান

উদা. 8. A certain number consisting of two digits is equal to eight times the sum of its digits; if 45 be subtracted from the number, the digits interchange their places. Find the number. [C. U. 1919]

মনে কর, একক স্থানের অঙ্ক  $x$  এবং দশক স্থানের অঙ্ক  $y$ , হুতরাং সংখ্যাটি হইল  $10y + x$ .

প্রদত্ত সর্ত হইতে পাই  $10y + x = 8(x+y) \dots (1)$  এবং

$10y + x - 45 = 10x + y \dots (2)$ . এখন (1) হইতে  $2y - 7x = 0 \dots (3)$

এবং (2) হইতে  $9y - 9x = 45$ , বা,  $y - x = 5 \dots (4)$

(3) ও (4) সমাধান করিয়া পাই  $x = 2$  এবং  $y = 7$ .

$\therefore$  নির্ণেয় সংখ্যাটি =  $10 \times 7 + 2 = 72$ .



[ **উদ্য:** Digit বলিতে কেবল  $x$  ও  $y$  বুঝাইবে, কিন্তু সংখ্যাটি হইবে  $10y+x$ . যদি শতকের স্থানে  $z$  থাকিত, তবে সংখ্যাটি হইত  $100z+10y+x$ . বালকেরা প্রায়ই number ও digit গোলমাল করিয়া ফেলে। ]

**উদা. 9.** The sum of the digits of a number less than 100 is 6 ; if the digits be reversed the resulting number will be less by 18 than the original number. Find the number.

[C. U. '25]

সংখ্যাটি 100 অপেক্ষা কম বলিয়া উহা দুই অঙ্কের।

মনে কর, এককের অঙ্ক  $x$  ও দশকের অঙ্ক  $y$ , সুতরাং সংখ্যাটি  $10y+x$ .

প্রদত্ত সর্তব্য হইতে পাই  $x+y=6\cdots(1)$

এবং  $10x+y=10y+x-18\cdots(2)$ .

(2) হইতে পাই  $9x-9y=-18$ . বা,  $x-y=-2\cdots(3)$

এখন (1) ও (3) সমাধান করিলে পাই  $x=2$ , এবং  $y=4$ .

$\therefore$  নির্ণেয় সংখ্যাটি  $=10 \times 4 + 2 = 42$ .

**উদা. 10.** A number consists of two digits ; the sum of the digits is 11, and if the left digit be increased by 2, it ( the digit ) will be equal to  $\frac{1}{3}$ th of the number. Find the number.

[C. U. '36]

মনে কর, সংখ্যাটি  $10y+x$ . প্রদত্ত সর্তব্য হইতে  $x+y=11\cdots(1)$

এবং  $y+2=\frac{1}{3}(10y+x)\cdots(2)$ . (2) হইতে  $8y+16=10y+x$ ,

বা,  $2y+x=16\cdots(3)$ . (1) ও (3) সমাধান করিলে  $x=6$ ,  $y=5$ .

$\therefore$  নির্ণেয় সংখ্যা  $=5 \times 10 + 6 = 56$ .

**উদা. 11.** The sum of a number consisting of two digits and the number formed by interchanging the digits is 110 and the difference between the digits is 6. \*Find the number.

[A. U. '28]

মনে কর, সংখ্যাটি  $=10y+x$ . অতএব, প্রদত্ত সর্তব্য হইতে

$(10y+x)+(10x+y)=110\cdots(1)$  এবং  $x-y=6$  বা  $x-y=6\cdots(2)$

(1) হইতে পাই  $11x - 11y = 110$ , বা,  $x + y = 10 \dots (3)$ .

এখন (2) ও (3) সমাধান করিলে পাই  $x = 8$  ও  $y = 2$ . অথবা  $x = 2$ ,  $y = 8$   
অতএব, নির্ণয় সংখ্যাটি 28 অথবা 82.

[ এককের অঙ্ক বড় ধরিলে 28, দশকের অঙ্ক বড় ধরিলে 82 ]

উদা. 12. One of the digits of a number is greater by 5 than the other. When the digits are inverted the number becomes  $\frac{3}{8}$ ths of the original number. Find the number.

[D. B. '28]

মনে কর, এককের অঙ্ক  $x$  ও দশকের অঙ্ক  $y$ , সুতরাং সংখ্যাটি  $= 10y + x$ .

[ N.B. এখানে অঙ্কদ্বয় উল্টাইয়া গেলে নতুন সংখ্যাটি পূর্ব সংখ্যা অপেক্ষা ছোট হয় বলিয়া এককের অঙ্ক দশকের অঙ্ক অপেক্ষা কম আছে বুঝা যায়। আর অঙ্কদ্বয় উল্টাইয়া দিলে নতুন সংখ্যাটি যদি আগের সংখ্যা অপেক্ষা বেশী হয়, তবে এককের অঙ্ক বড় আছে বুঝিবে। ]

প্রদত্ত সর্ত হইতে  $y - x = 5 \dots (1)$  এবং  $10x + y = \frac{3}{8}(10y + x) \dots (2)$ .

(2) হইতে  $80x + 8y = 30y = 3x$ , বা,  $77x - 22y = 0$ ,

বা,  $7x - 2y = 0 \dots (3)$ , এক্ষেপে, (1) ও (3) সমাধান করিলে  $x = 2$ ,  $y = 7$ .

$\therefore$  নির্ণয় সংখ্যা  $= 7 \times 10 + 2 = 72$ .

উদা. 13. There is a number of two digits whose difference is 2, and if it be diminished be  $\frac{3}{8}$  times the sum of the digits; the digits will be inverted ; find it. [C. U. 1899]

মনে কর, এককের অঙ্ক  $x$ , ও দশকের অঙ্ক  $y$ , সুতরাং সংখ্যাটি  $= 10y + x$ .  
এখানে অঙ্ক দুইটি উল্টাইয়া দিলে সংখ্যাটি কমিয়া যায় বলিয়া এককের অঙ্ক দশকের অঙ্ক অপেক্ষা ছোট।

$\therefore y - x = 2 \dots (1)$ , এবং  $(10y + x) - \frac{3}{8}(x + y) = 10x + y \dots (2)$ .

(2) হইতে  $20y + 2x - 3x - 3y = 20x + 2y$  [ 2 দ্বারা গুণ করিয়া ]

বা,  $15y - 21x = 0$ , বা,  $5y - 7x = 0 \dots (3)$

(1) ও (3) সমাধান করিলে পাই  $x = 5$ , এবং  $y = 7$ .

$\therefore$  নির্ণয় সংখ্যা  $= 7 \times 10 + 5 = 75$ .

উদা. 14. A number consists of three digits of which the middle one is 0 and the sum 8 ; the number formed by interchanging the digits is greater than the number itself by 198. Find the number. [C. U. 1922]

মনে কর, এককের অঙ্ক  $x$ , দশকের অঙ্ক 0 এবং শতকের অঙ্ক  $y$  ; সুতরাং সংখ্যাটি  $= 100y + x$ .

প্রদত্ত সর্তগুলি হইতে পাই  $x + y = 8$  .....(1)

এবং  $100x + y = 100y + x + 198$  .....(2)

(2) হইতে পাই  $99x - 99y = 198$ , বা  $x - y = 2$  .....(3)

(1) ও (3) সমাধান করিলে পাই  $x = 5$ ,  $y = 3$ .

$\therefore$  নির্ণেয় সংখ্যা  $= 3 \times 100 + 5 = 305$ .

উদা. 15. A number consists of 3 digits whose sum is 10. The middle digit is equal to the sum of the other two ; and the number will be increased by 99 if the first and third digits be interchanged. Find the number. [C. U. 1923]

[জ্যেষ্ঠব্য : মনে কর, 325 একটি সংখ্যা। ইহার first digit বলিলে 3কে বুঝাইবে ( 5কে নহে ), কারণ 325 সংখ্যাটি লিখিবার সময় আমরা প্রথমে 3, তারপর 2, তারপর 5 লিখি । ]

মনে কর, একক, দশক ও শতকের অঙ্ক যথাক্রমে  $x$ ,  $y$ ,  $z$  , সুতরাং সংখ্যাটি  $= 100z + 10y + x$ .

প্রদত্ত সর্তগুলি হইতে পাই  $x + y + z = 10$  .....(1),  $x + z = y$  .....(2)

এবং  $100x + 10y + z = 100z + 10y + x + 99$  .....(3).

(1) ও (2) হইতে পাই  $x + (x + z) + z = 10$ , বা,  $2(x + z) = 10$ ,

বা,  $x + z = 5$  .....(4). (3) হইতে  $99x - 99z = 99$ , বা,  $x - z = 1$  .....(5)

এখন (4) ও (5) সমাধান করিলে  $x = 3$ ,  $z = 2$  হয়, সুতরাং  $y = 5$ .

$\therefore$  নির্ণেয় সংখ্যাটি  $= 2 \times 100 + 5 \times 10 + 3 = 253$ .

উদা. 16. A number consists of 3 digits, each greater by 2 than that which precedes it ; if 16 be subtracted from the number, the remainder will be less than 20 times the sum of the digits by 10. Find the number.

মনে কর, শতকের অঙ্ক  $x$ , হাজার প্রদত্ত সর্ব হইতে দশকের অঙ্ক  $x+2$  এবং এককের অঙ্ক  $x+4$  হইবে

$$\text{অতএব সংখ্যাটি} = 100x + 10(x+2) + (x+4) = 111x + 24.$$

$$\begin{aligned} \text{এখন দ্বিতীয় সর্ব হইতে পাই} &= 111x + 24 - 16 \\ &= 20(x+x+2+x+4) - 10, \end{aligned}$$

$$\text{বা, } 111x + 8 = 60x + 10, \text{ বা, } 51x = 102, \therefore x = 2.$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সংখ্যা} = 111 \times 2 + 24 = 246.$$

**উদা. 17.** A number consists of three consecutive digits. If the digits are reversed, the difference of the numbers is 33 times the greatest digit involved. Find the number.

[C. U. 1939]

মনে কর, শতকের অঙ্ক  $x$ , হাজার এখানে দশকের অঙ্ক  $x+1$  এবং এককের অঙ্ক  $x+2$ .

$$\therefore \text{সংখ্যাটি} = 100x + 10(x+1) + (x+2) = 111x + 12.$$

প্রদত্ত দ্বিতীয় সর্ব হইতে পাই

$$\{100(x+2) + 10(x+1) + x\} - (111x + 12) = 33(x+2)$$

$$\text{বা, } 111x + 210 - 111x - 12 = 33x + 66, \text{ বা, } 33x = 132, \therefore x = 4.$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সংখ্যা} = 4 \times 111 + 12 = 456.$$

**19. স্রোত ও নৌকার গতি :** স্থির জলে অর্থাৎ নদীতে স্রোত না থাকিলে নৌকার গতিবেগ যত, এক ঘণ্টায় নৌকা ততদূর যায়। যদি স্রোত থাকে, তবে (1) স্রোতের অহুকূলে (with the stream or current, down-stream, down the river) যাইবার সময় নৌকার গতি ও স্রোতের গতির সমষ্টি যত, এক ঘণ্টায় নৌকা ততদূর যায়, কিন্তু (2) স্রোতের প্রতিকূলে বা বিপরীত দিকে (against the current, up-stream or up the river) যাইবার সময় নৌকার গতি ও স্রোতের গতির অন্তর, যত, নৌকা এক ঘণ্টায় ততদূর যায়।

**উদা. 18.** A boat goes up-stream 30 miles and down-stream 44 miles in 10 hours, it also goes up-stream 40 miles and down-stream 55 miles in 13 hours. Find the rate of the stream and of the boat.

[D. B. 1933]

এখানে মনে কর, নৌকার গতি ঘণ্টায়  $x$  মাইল এবং স্রোতের গতি ঘণ্টায়  $y$  মাইল, সুতরাং স্রোতের অঙ্কুলে, নৌকা ঘণ্টায়  $x+y$  এবং স্রোতের প্রতিকূলে ঘণ্টায়  $x-y$  মাইল যায়।

এক্ষেণে, প্রদত্ত সর্তব্যর হইতে পাই  $\frac{30}{x-y} + \frac{44}{x+y} = 10 \dots (1)$

$\frac{40}{x-y} + \frac{55}{x+y} = 13 \dots (2)$

(1)  $\times 4$  ও (2)  $\times 3$  করিয়া পাই  $\frac{120}{x-y} + \frac{176}{x+y} = 40$

এবং  $\frac{120}{x-y} + \frac{165}{x+y} = 39$

(বিয়োগ)  $\therefore \frac{11}{x+y} = 1. \therefore x+y=11 \dots (3)$

এখন  $x+y$  এর মান বসাইয়া (1) হইতে পাই  $x-y=5 \dots (4)$ .

(3) ও (4) সমাধান করিলে পাই  $x=8, y=3$ .

অতএব, নৌকার গতি ঘণ্টায় ৪ মাইল এবং স্রোতের গতি ঘণ্টায় ৩ মাইল।

**উদা. 19.** A man rowing at the rate of 5 miles an hour in still water takes thrice as much time in going 40 miles up a river as in going 40 miles down; find the rate at which the river flows. [C. U. 1935]

মনে কর, নদীর বা স্রোতের গতি ঘণ্টায়  $x$  মাইল, সুতরাং নৌকাটি স্রোতের প্রতিকূলে (up the river) ঘণ্টায়  $5-x$  মাইল এবং স্রোতের অঙ্কুলে (down) ঘণ্টায়  $5+x$  মাইল যায়।  $\therefore$  ৪০ মাইল স্রোতের প্রতিকূলে ও

অঙ্কুলে বাইতে যথাক্রমে  $\frac{40}{5-x}$  ও  $\frac{40}{5+x}$  ঘণ্টা লাগে।

এখন প্রদত্ত সর্ত হইতে পাই  $\frac{40}{5-x} = 3 \times \frac{40}{5+x}$  বা,  $\frac{1}{5-x} = \frac{3}{5+x}$ .

বা,  $5+x=15-3x$ , বা,  $4x=10$ ,  $\therefore x=2\frac{1}{2}$ .

$\therefore$  নির্ণয় নদীর গতি ঘণ্টায়  $2\frac{1}{2}$  মাইল।

উদা. 20. A person rowed down a river, a distance of 70 miles in 10 hours with the stream and rowed back again in 70 hours. Find the rate of flow of the river per hour.

[C. U. '41]

মনে কর, নদীর গতি  $x$  মাইল এবং নৌকার গতি ঘণ্টায়  $y$  মাইল।  
প্রদত্ত সর্ব হইতে পাই  $10(x+y) = 70 \dots (1)$  এবং  $70(y-x) = 70 \dots (2)$ .

(1) হইতে  $x+y=7 \dots (3)$ , এবং (2) হইতে  $y-x=1 \dots (4)$ .

এখন (3) ও (4) সমাধান করিলে  $x=3$ ,  $\therefore$  নদীর গতি ঘণ্টায় 3 মাইল।

20. ঘড়ি সম্বন্ধীয় সমাধান : (1) ঘড়ির dial-টি ছোট ছোট 60 ভাগে বিভক্ত করা আছে। এক একটি ভাগকে মিনিট-ঘর বা minute space বা minute division বলে। মিনিটের কাঁটা যতক্ষণে 60 মিনিট ঘর যায় ঘণ্টার কাঁটা ততক্ষণে 5 মিনিট ঘর যায়।

উদা. 21. A man who went out between 4 and 5 P. M. and returned between 5 and 6 P. M. found that the hands of his watch had exactly changed places. When did he go out ?  
[C. U. '30 Addl. '51]

মনে কর, লোকটি 4টা  $x$  মিনিটের সময় বাহিরে গিয়াছিল, এবং ঐ সময় ঘণ্টার কাঁটা 4টা ও 5টার মধ্যে B বিন্দুতে এবং মিনিটের কাঁটা 5টা ও 6টার মধ্যে C বিন্দুতে ছিল। এখন 4টা  $x$  মিনিটের সময় মিনিটের কাঁটা 12টার ঘর হইতে  $x$  মিনিট-ঘর এবং ঘণ্টার কাঁটা 4টার ঘর হইতে  $\frac{1}{2}x$  মিনিট-ঘর আগাইয়া ছিল। এখন চিত্রে দেখ—

চাপ AC =  $x$  মিনিট-ঘর,

চাপ AB =  $20 + \frac{1}{2}x$  মিনিট-ঘর

চাপ CKA =  $60 - x$  মিনিট-ঘর

চাপ BC =  $x - (20 + \frac{1}{2}x)$  মিনিট-ঘর।

লোকটি যতক্ষণ বাহিরে ছিল ততক্ষণে



মিনিটের কাঁটা CKAB চাপ অর্থাৎ  $(60 - x + 20 + \frac{1}{2}x)$  মিনিট-ঘর গিয়াছে এবং ঘণ্টার কাঁটা BC চাপ অর্থাৎ  $x - (20 + \frac{1}{2}x)$  মিনিট-ঘর গিয়াছে। একই সময়ে মিনিটের কাঁটা ঘণ্টার কাঁটার 12 গুণ যায়।

Exo. M. (IX). A.—5

$$\therefore 60 - x + 20 + \frac{1}{2} = 12\frac{1}{2}x - (20 + \frac{1}{2})$$

$$\text{বা, } 80 - \frac{1}{2}x = 11x - 240, \text{ বা } \frac{1}{2}x = 320,$$

$$\therefore x = \frac{640}{1} = 640.$$

অতএব, সে ব্যক্তি ৪টা ২৬৪ মিনিট সময় বাহির হইয়াছিল।

উদা. ২২. A man who went out between 3 P. M. and 4 P. M. and returned between 4 P. M. and 5 P. M. found that the hands of the clock had changed places. When did he go out? When did he return and how long did he stay outside? [ cf. C. U. 1942 ]

[ দ্বিতীয় প্রশ্নালী ] মনে কর, লোকটি ৩টা বাজিয়া  $x$  মিনিটে বাহির হইল এবং ৪টা বাজিয়া  $y$  মিনিটে ফিরিয়া আসিল। মিনিটের কাঁটা যতক্ষণে  $x$  ও  $y$  মিনিট-ঘর যায়, ঘণ্টার কাঁটা ততক্ষণে  $\frac{1}{2}$  এবং  $\frac{1}{2}$  মিনিট-ঘর যায়। অতএব, সে বাহির হইবার সময় ঘণ্টার কাঁটা ১২টার ঘর হইতে  $15 + \frac{1}{2}$  মিনিট-ঘর দূরে ছিল এবং ৪টা  $y$  মিনিটে ফিরিয়া দেখিল মিনিটের কাঁটা সেই স্থানে আছে।  $\therefore y = 15 + \frac{1}{2} \dots (1)$ . আবার, ফিরিবার সময় ঘণ্টার কাঁটা ১২টার ঘর হইতে  $20 + \frac{1}{2}$  মি. ঘর দূরে আছে, পূর্বে ঐ স্থানে মিনিটের কাঁটা ছিল।  $\therefore x = 20 + \frac{1}{2} \dots (2)$ .

এখন (১) ও (২) সমাধান করিলে পাই  $x = 21\frac{1}{2}$  এবং  $y = 16\frac{1}{2}$ .  
 $\therefore$  লোকটি ৩টা  $21\frac{1}{2}$  মিনিটে বাহির হইয়া ৪টা  $16\frac{1}{2}$  মিনিটে ফিরিয়াছে এবং ঐ দুই সময়ের অন্তর অর্থাৎ  $55\frac{1}{2}$  মিনিট বাহিরে ছিল।

### [ বিবিধ ]

উদা. ২৩. A person bought an article and sold it at a profit of 6%. Had he bought it at 4 p.c. less and sold it at Rs. 2. 6 as. more, his profit would have been 12%. For how much did he buy it? [ C. U. 1944 ]

মনে কর, জব্বাটির ক্রয়মূল্য  $x$  টাকা। উহা ৬% লাভে বিক্রয় করিলে বিক্রয়মূল্য হইবে  $\frac{106}{100}x$  টাকা। আর উহা ৪% কম মূল্যে কেনা থাকিলে ক্রয়মূল্য হইত  $\frac{96}{100}x$  টাকা এবং  $\frac{96}{100}x$  টাকার জব্বা বিক্রয় করিয়া ১২% লাভ

করিলে বিক্রয়মূল্য হইত  $\frac{112}{100} \times \frac{96}{100}x$  টাকা, এই বিক্রয়মূল্য কিন্তু প্রথম বিক্রয়মূল্য অপেক্ষা 2 টা. 6 আ. বা  $\frac{1}{10}$  টাকা বেশী বলা আছে।

$$\therefore \frac{112 \times 96}{100 \times 100}x = \frac{106}{100}x + \frac{1}{10}x \quad \text{বা} \quad \frac{1072}{625}x - \frac{53}{50}x = \frac{19}{10}, \text{ বা } \frac{1072}{1250}x = \frac{19}{10},$$

$$\therefore x = \frac{19}{10} \times \frac{1250}{1072} = 156\frac{1}{4}. \therefore \text{নির্ণেয় ক্রয়মূল্য} = 156 \text{ টা. 4 আনা।}$$

উদা. 24. Divide the number 77 into three parts such that the sum of the first and second multiplied by 3, the sum of the second and third diminished by 3, and the sum of the first and third increased by 3 may be all equal.

[ A U. '33 ]

মনে কর, অংশ তিনটি যথাক্রমে  $x, y, z$ .

অতএব, প্রদত্ত সত্যগুলি হইতে পাই  $x + y + z = 77 \dots (1)$

$$\text{এবং } 3(x + y) = y + z - 3 = x + z + 3 \dots (2)$$

$$\text{এখন, } 3x + 3y = y + z - 3, \quad \text{বা } 3x + 2y - z = -3 \dots (3)$$

$$\text{আবার, } 3x + 3y = x + z + 3, \quad \text{বা } 2x + 3y - z = 3 \dots (4)$$

$$\therefore (3) + (4) \text{ করিলে } 5x + 5y - 2z = 0 \dots (5)$$

$$\text{এবং } (1) \times 5 \text{ করিলে } 5x + 5y + 5z = 385$$

$$(\text{বিয়োগ করিয়া}) \quad -7z = -385, \therefore z = 55.$$

$$\text{এখন, } (1) \text{ হইতে } x + y = 77 - 55 = 22 \dots (6),$$

$$\text{এবং } (2) \text{ এর শেষ অংশ হইতে } y - x = 6 \dots (7)$$

$$\therefore (6) \text{ ও } (7) \text{ সমাধান করিলে পাই } x = 8, y = 14.$$

অতএব, নির্ণেয় অংশগুলি = 8, 14, 55.

উদা. 25. Two mixtures contain wine and water in the ratio 2 : 3 and 5 : 4 respectively ; in what ratio must the two mixtures be mixed together so that the resulting mixture may contain equal quantities of wine and water ?

মনে কর, প্রথমটি হইতে  $x$  পরিমাণ ও দ্বিতীয়টি হইতে  $y$  পরিমাণ দ্রব্য লওয়া হইল। প্রথমটির  $x$  পরিমাণের মধ্যে মদ আছে  $\frac{2}{5}x$  এবং জল আছে  $\frac{3}{5}x$ . দ্বিতীয়টির  $y$  পরিমাণের মধ্যে মদ  $\frac{5}{9}y$  ও জল  $\frac{4}{9}y$ .



$\therefore (x+y)$  পরিমাণ মিশ্রণের মধ্যে মদের পরিমাণ  $\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y$   
এবং জলের পরিমাণ  $\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y$ ;

$\therefore \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y = \frac{1}{3}x$  বা  $\frac{1}{3}y - \frac{1}{3}y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}x$ ,

বা,  $\frac{y}{9} = \frac{x}{5}$ ,  $\therefore \frac{x}{y} = \frac{5}{9}$   $\therefore$  অনুপাত = 5 : 9.

[ দ্রষ্টব্য : এখানে যদি শেষ মিশ্রণের জল সমান সমান না বলিয়া

3 : 4 বা অন্য অনুপাত বলা থাকিত, তবে  $\frac{\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y}{\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y} = \frac{3}{4}$  এইরূপ লিখিয়া  $x : y$

কত হয় নির্ণয় করিতে হইত । ]

উদা. 26. A traveller walks a certain distance ; had he gone half a mile an hour faster he would have walked it in  $\frac{4}{5}$ ths of the time ; had he gone half a mile an hour slower, he would have been  $2\frac{1}{2}$  hours longer on the road. Find the distance.

মনে কর, মোট দূরত্ব  $x$  মাইল এবং লোকটি ঘণ্টায়  $y$  মাইল বেগে চলিয়াছিল ।

$\therefore$  সে  $x$  মাইল গিয়াছিল  $\frac{4}{5}$  ঘণ্টায় । অতএব প্রদত্ত সতগুলি হইতে পাঠ

$$\frac{x}{y + \frac{1}{2}} = \frac{4}{5} \times \frac{x}{y} \dots\dots(1) \quad \text{এবং} \quad \frac{x}{y - \frac{1}{2}} = \frac{x}{y} + 2\frac{1}{2} \dots\dots(2)$$

একণে (1) হইতে  $\frac{1}{y + \frac{1}{2}} = \frac{4}{5y}$ , বা,  $5y = 4y + 2$ ,  $\therefore y = 2$ .

$\therefore$  (2) হইতে  $\frac{x}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{x}{2} + 2\frac{1}{2}$ , বা,  $\frac{2x}{3} = \frac{x}{2} + 2$ ,

বা,  $4x = 3x + 15$ ,  $\therefore x = 15$ .

$\therefore$  নির্ণেয় দূরত্ব = 15 মাইল ।

উদা. 27. If a sum of money be lent at 5%, the interest for a certain time exceeds the lone by Rs. 80 ; but if it be lent at 3% for a fourth of the time, the loan exceeds its interest by Rs. 328. Find the sum lent.

: মনে কর,  $x$  টাকা  $y$  বৎসরের জন্য ধার দেওয়া হইয়াছিল ।

5% হারে  $x$  টাকা এক বৎসরের সুদ =  $\frac{5x}{100} = \frac{x}{20}$

∴ " " " " " " " =  $\frac{x}{20}$ .

অতএব,  $\frac{x}{20} = x + 80 \dots\dots(1)$

আবার, 3% হারে  $x$  টাকা এক বৎসরের সুদ =  $\frac{3x}{100} \times \frac{1}{4} = \frac{3x}{400}$

অতএব,  $x = \frac{3x}{400} + 328 \dots\dots(2)$

এক্ষণে (1) হইতে  $x = 20(x + 80) \dots\dots(3)$

এবং (2) হইতে  $\frac{3xy}{400} = x - 328$ , বা,  $\frac{400(x - 328)}{3} \dots\dots(4)$

∴  $\frac{400(x - 328)}{3} = 20(x + 80)$ , বা,  $\frac{20(x - 328)}{3} = x + 80$ ,

বা,  $20x - 6560 = 3x + 240$ , বা,  $17x = 6800$ , ∴  $x = 400$ .

অতএব, 400 টাকা ধার দেওয়া হইয়াছিল।

উদা. 28. If the larger of two numbers is divided by the smaller the quotient and remainder are each 3. The result will be the same, if 10 times the smaller is divided by the larger. Find the numbers.

মনে কর,  $x$  ও  $y$  দুইটি সংখ্যা এবং  $x > y$ .

∴  $x$  কে  $y$  দিয়া ভাগ করিলে ভাগফল ও ভাগশেষ উভয়ই 3 হয়,

∴  $x = 3y + 3 \dots\dots(1)$

অনুরূপে দ্বিতীয় সর্ত হইতে পাই  $10y = 3x + 3 \dots\dots(2)$

(2)-এ  $x$  এর স্থানে  $3y + 3$  বসাইয়া পাই,  $10y = 3(3y + 3) + 3$ ,

বা,  $10y = 9y + 12$ , ∴  $y = 12$ .

∴ (1) হইতে  $x = 3 \times 12 + 3 = 39$ .

∴ নির্ণেয় সংখ্যা = 39 এবং 12.

উদা. 29. At a certain election there were two rival candidates, and their supporters were conveyed to the polling booths in carriages capable of accommodating 10 and 15 voters respectively. If the voters, 1050 in all, just filled 85 carriages, find by what majority the election was won.

মনে কর, প্রথম ও দ্বিতীয় ব্যক্তির ভোটার সংখ্যা যথাক্রমে  $x$  ও  $y$ .

অতএব, প্রদত্ত সর্তব্য হইতে পাই,  $x + y = 150 \dots (1)$

আবার,  $\therefore$  প্রথম ব্যক্তির ভোটারদের অঙ্ক  $\frac{1}{10}$  সংখ্যক গাড়ী ও দ্বিতীয় ব্যক্তির ভোটারদের অঙ্ক  $\frac{1}{15}$  সংখ্যক গাড়ী হইবে,  $\therefore \frac{x}{10} + \frac{y}{15} = 85 \dots (2)$

এক্ষণে সমীকরণ দুইটি সমাধান করিয়া পাই  $x = 450$ ,  $y = 600$ .

অতএব, দ্বিতীয় ব্যক্তি  $(600 - 450) = 150$  ভোট বেশী পাইয়া জয়লাভ করিয়াছে।

**উদা. 30.** A train 88 yds. long passed another train 110 yds. long travelling in the same direction on a parallel line of rails in 27 seconds, but had the slower train been running half as fast again, it would have been passed in twice that time. Find the rates at which the trains were travelling.

মনে কর, প্রথম ক্রান্তগামী ট্রেনটি ঘণ্টায়  $x$  মাইল বেগে এবং অন্য ট্রেনটি  $y$  মাইল বেগে যাইতেছিল।

প্রথম পক্ষে সময় = 27 সে. =  $4\frac{3}{4}$  ঘ., দ্বিতীয় পক্ষে সময় লাগে  $54$  ঘ.

$\therefore$  ট্রেন দুইটি একই দিকে যাইতেছে,

$\therefore$  উভয়ের আপেক্ষিক বেগ ঘণ্টায়  $(x - y)$  মাইল।

উভয় ট্রেনের মোট দৈর্ঘ্য =  $(110 + 88)$  গ. = 198 গ.

$$= 1\frac{9}{80} \text{ মা.} = \frac{9}{80} \text{ মাইল}$$

ঘণ্টায়  $(x - y)$  মাইল বেগে  $\frac{9}{80}$  মাইল যাইতে সময় লাগে  $\frac{9}{80(x - y)}$  ঘ.

$$\text{সুতরাং } \frac{9}{80(x - y)} = \frac{3}{400}, \text{ বা, } x - y = 15 \dots (1)$$

দ্বিতীয় পক্ষে, দ্বিতীয় ট্রেনের গতি ঘণ্টায়  $\frac{3}{2}y$  মাইল।

$\therefore$  উভয় ট্রেনের আপেক্ষিক বেগ = ঘণ্টায়  $(x - \frac{3}{2}y)$  মাইল।

$$\therefore \frac{9}{80(x - \frac{3}{2}y)} = \frac{3}{200}, \text{ বা, } 2x - 3y = 15 \dots (2)$$

এক্ষণে,  $(1) \times 2$  করিয়া পাই

$$2x - 2y = 30$$

এবং  $(2)$  হইতে  $2x - 3y$

$\therefore$  (বিয়োগ করিয়া)  $y = 15$  (১) হইতে  $x = 30$ .

অতএব, ট্রেন দুইটির মধ্যকার দূরত্ব বর্ধাক্রমে ঘণ্টায় 30 মাইল ও 15 মাইল।

**উদা. 31.** A certain number of men paid a bill. If there had been 10 more, each would have paid 1s. less; but if there had been 5 fewer, each would have paid 1s. more. Find the number of men and what each had to pay.

মনে কর, মোট লোকসংখ্যা  $x$  এবং প্রত্যেকে  $y$  শিলিং করিয়া দিয়াছে, সুতরাং বিলটি ছিল মোট  $xy$  শিলিং-এর। এক্ষণে প্রদত্ত সর্তব্য হইতে পাই

$$\frac{xy}{x+10} = y-1 \quad (1) \quad \text{এবং} \quad \frac{xy}{x-5} = y+1 \quad (2)$$

(1) হইতে পাই  $xy = xy - x + 10y - 10$ , বা  $x - 10y = -10 \quad (3)$

(2) ,, ,,  $xy = xy + x - 5y - 5$ , বা  $x - 5y = 5 \quad (4)$

$\therefore$  (বিয়োগ)  $-5y = -15$ ,  $\therefore y = 3$ .

আবার, (4) হইতে  $x - 5 \times 3 = 5$ ,  $\therefore x = 20$ .

অতএব, নির্ণয় লোকসংখ্যা = 20, এবং প্রত্যেকে 3 শিলিং দিয়াছিল।

**উদা. 32.** In a race of 1 mile, A gives B a start of 88 yds. and beats him by a minute and a half; but A is beaten by 44 yds, if he gives B a start of 2 mins. 12 seconds. In what time can A and B run a mile?

মনে কর, 1 মাইল বাইতে A এর  $x$  মিনিট এবং B এর  $y$  মিনিট লাগে।

অতএব, 1 মিনিটে A যায়  $\frac{1760}{x}$  গজ এবং B যায়  $\frac{1760}{y}$  গজ।

প্রথম দৌড়ে, A অপেক্ষা B 88 গজ আগে ছিল, অথচ  $1\frac{1}{2}$  মিনিটে B পরাজিত হইয়াছে।  $\therefore$  A 1 মাইল যায়  $x$  মিনিটে,  $\therefore (1760 - 88)$  বা, 1672 গজ বাইতে B এর  $(x + 1\frac{1}{2})$  মিনিট সময় লাগে।

$$\therefore 1672 \div \frac{1760}{y} = x + 1\frac{1}{2}, \text{ বা } \frac{1672y}{1760} = \frac{2x+3}{2},$$

$$\text{বা, } 20x - 19y = -30 \quad (1).$$

দ্বিতীয় দৌড়ে, B যখন গন্তব্যে পৌঁছায়, A তখন তাহার 44 গজ পিছনে ছিল অর্থাৎ A তখন  $(1760 - 44)$  বা 1716 গজ গিয়াছে।  $\therefore$  B  $2\frac{1}{2}$  মিনিট আগে রওনা হইয়াছিল,  $\therefore$  বা  $\frac{1}{2}$  মিনিটে গিয়াছে। অতএব A  $\frac{1}{2}$  মিনিটে 1716 গজ গিয়াছে।

$$\therefore 1716 \div \frac{1760}{x} = y - 2\frac{1}{2}, \text{ বা } \frac{1716x}{1760} = \frac{5y-11}{5},$$

$$\text{বা, } 39x - 40y = -88 \dots (2)$$

এক্ষণে, (1)  $\times 40$  এবং (2)  $\times 19$  করিয়া পাই

$$800x - 760y = -1200$$

$$\text{এবং } 741x - 760y = -1672$$

$$\therefore (\text{বিয়োগ}) 59x = 472, \therefore x = 8.$$

$$\therefore (1) \text{ হইতে } y = 10.$$

অতএব, এক মাইল যাইতে A ও B এর যথাক্রমে 8 ও 10 মিনিট সময় লাগিয়াছিল।

### Exercise 5

1. Ten years ago, a father was seven times as old as his son; two years hence twice his age will be equal to 5 times his son's; what are their present ages? [C. U. 1920]

2. A motorist does a journey of 80 miles in 6 hours. During the first part of the journey he travels at the rate of 10 miles and during the latter part at 18 miles an hour. How far does he travel at each rate? [C. U. '18, '29]

3. A number consists of two digits. The sum of the digits falls short of the number by 54; if the digits be reversed the number exceeds the old number by 27; find the number. [P. U. '35]

4. The product of two numbers is 18225 and the quotient when the larger number is divided by the smaller is 81. Find the numbers. [ C. U. 1945 ]

5. Find a fraction which becomes  $\frac{1}{2}$  on subtracting 1 from the numerator and adding 1 to the denominator and reduces to  $\frac{1}{3}$  on subtracting 7 from the numerator and 2 from the denominator. [ C. U. 1928 ]

6. A number consists of two digits. The digit in the tens' place is 3 times the digit in the units' place. If 54 is subtracted from the number the digits are inverted. Find the number. [ C. U. 1943 ]

7. A certain number between 10 and 100 is 8 times the sum of its digits, and if 45 be subtracted from it, the digits will be reversed. Find the number. [ C. U. 1919 ]

8. Reverse the digits of a number and it will become  $\frac{1}{8}$ th of what it was before ; and also the difference between the two digits is 1. Find the number. [C.U. 1883, '49 Su.]

9. A man, who went out for an evening walk between 5 and 6, returned between 6 and 7 and found that the hands of the clock had exactly changed places. When did he go out ? [ C. U. 1944 ]

10. A boy spends his money in oranges. If he had received 4 more for his money, they would have averaged a half-penny each less, if three less, a half-penny each more. How much did he spend ? [ P. U. 1921, Addl. ]

11. A man rowing at the rate of 4 miles an hour takes thrice as much time in going 30 miles up a river as in going 30 miles down ; find the rate at which the river flows.

12. A mixture contains wine and water in the ratio of 5 : 3 and another in the ratio of 4 : 5. In what ratio must the two kinds of mixture be mixed to give a mixture of wine and water in the ratio of 31 : 29 ?

13. How much gold, at Rs. 20 a tola, must be mixed with 14 tolas of Rs. 15 a tola, so that the mixture may be worth Rs. 18 a tola ? [ P. U. 1921 ]

14. If a cyclist had gone 2 miles  $\frac{1}{4}$  hour faster, he would have taken 1 hour 40 minutes less to ride 100 miles. What time did he take ? [ P. U. 1925 ]

15. A number consists of two digits, the digit in the units' place being four times that in the tens' place. If the digits be inverted, the new number increased by 2 equals three times the old number. Find the number. [ C.U. 1901 ]

16. Two men are 40 miles apart, walking in opposite directions, meet in  $6\frac{2}{3}$  hours ; but if one of them had doubled his pace, they would have met in  $\frac{2}{3}$ ths of the time. Find their respective speeds. [ P. U. 1931 ]

17. A man rows 30 miles down a river in 6 hours and returns in 10 hours. Find the rate at which the man rows and also the rate at which the river flows. [ P. U. 1933 ]

18. A number consists of two digits ; the digit in the tens' place is twice the digit in the units' place ; if 36 be subtracted from the number, the digits are inverted ; find the number. [ C. U. 1946 ]

19. The number of months in the age of a man on his birth-day in the year 1875 was exactly half of the number denoting the year in which he was born. In what year was he born ? [ A. U. ]

20. A boy buys a certain number of oranges at 3 for 2d., and one-third of that at 2 for 1d. ; at what price must he sell them to get 20% profit ? If his profit be 5s. 4d., find the number bought. [ D. B. 1936 ]

21. One customer buys 14 lb. of tea and 10 lb. of coffee for £2. 3s. and another buys 11 lb. of tea and 15 lb. of coffee for £2. 4s. 6d. Find the price of tea and coffee per lb. [ D. B. '40 ]

22. A number consists of three digits each less by unity than that which follows it and if 3 be subtracted from the number, the remainder will be 20 times the sum of the digits. Find the number. [ G. U. '48 ]

23. P and Q start at the same time from Howrah and Madhupur and proceed towards each other at the rate of 20 and 30 miles per hour respectively. They meet when Q has proceeded 36 miles farther than P. Find the distance between Howrah and Madhupur. [C. U. '49]

24. If the numerator of a certain fraction is doubled and its denominator increased by 1, its value becomes  $\frac{1}{2}$ ; but if its denominator is doubled and its numerator increased by 1, its value becomes  $\frac{1}{6}$ . Find the fraction. [E. B. S. B. '55]

25. A man spent 15s. 2d. in buying oranges at the rate of 3 for 2 pence and apples at five pence a dozen; if he had bought 5 times as many oranges and  $\frac{1}{4}$  of the number of apples he would have spent £2. 4s. 2d. How many of each did he buy?

26. Find the distance between two towns when by increasing the speed 7 miles per hour a train can perform the journey in 1 hour less, and by reducing the speed 5 miles per hour can perform the journey in 1 hour more.

27. The middle digit of a number between 100 and 1000 is zero and the sum of the other digits is 16. If the digits be reversed, the number so formed exceeds the original number by 198; find it.

28. The three sides of a triangle are  $x+5$ ,  $4x-y$  and  $y+2$  inches in length. If the triangle is equilateral, find its perimeter.

29. If the sum of the digits of a number is divisible by 3, show that the number is divisible by 3.

30. If  $\frac{1}{3}$  be added to the numerator of a certain fraction, the fraction is increased by  $\frac{1}{15}$ , and if  $\frac{1}{4}$  be taken from the denominator the fraction becomes  $\frac{8}{15}$ . Find the fraction.

31. The incomes of two men are in the ratio 5 : 3 and their expenditures are as 9 : 5. Each saves Rs. 30 a year. Find their incomes.



32. A man walks a certain distance. Had he gone half a mile faster, he would have walked it in  $\frac{4}{5}$ th of the time, and had he gone  $\frac{1}{2}$  mile an hour slower, he would have taken 2 hours longer. Find the distance and the rate at which he walked.

33. If a sum of money be lent out at 5%, the interest for a certain time exceeds the loan by Rs. 60; but if it be lent at 6% for half the period, the loan exceeds the interest by Rs. 290. Find the sum.

34. If the larger of two numbers is divided by the smaller the quotient and the remainder are each 4. The result will be the same, if 20 times the smaller is divided by the larger. Find the numbers.

35. A can run 50 yds. whilst B runs 45 yds.; if B has 5 minutes' start in a race, what time will A take to get level with B?

36. A train 44 yards long passed another train 66 yards long travelling in the same direction in  $22\frac{1}{2}$  seconds. Had the slower train been running half as fast again, it would have been passed in 45 seconds. Find the rates at which the trains were travelling.

37. In a race of 1320 yards A gives B a start of 176 yards, and beats him by 15 seconds, but A is beaten by 110 yards, if he gives B a start of one minute. In what time can A and B run a mile?

### Theory of Indices ( সূচক প্রকরণ )

21. সূচক।  $a^3, a^m$  প্রভৃতিতে  $a$  এর ষাত বাহা ষারা সূচিত হইয়াছে (এখানে 3,  $m$  প্রভৃতি) তাহাকে ষাতের সূচক বলে।

$a^3$  এর অর্থ  $a \times a \times a$  (তিনটি  $a$  এর গুণফল),  $a^m$  এর অর্থ  $a \times a \times a \times \dots \times m$  সংখ্যক  $a$  এর গুণফল।

22. সূচক সম্বন্ধীয় নিম্নের নিয়মগুলি ভালরূপে শিখিতে হইবে

নিয়ম 1. To prove that  $a^m \times a^n = a^{m+n}$  where  $m$  and  $n$  are positive integers. [C. U. '30 ; D. B. '30 ; Pat U. '21]

[Positive = ধনাত্মক অর্থাৎ + চিহ্নযুক্ত এবং integer এর অর্থ পূর্ণসংখ্যা]

$a^m = a \times a \times a \times \dots \dots m$  সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$a^n = a \times a \times a \times \dots \dots n$  সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$\therefore a^m \times a^n = (a \times a \times a \times \dots \dots m$  সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত)  
 $\times (a \times a \times \dots \dots n$  সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত)

$= a \times a \times a \times \dots \dots (m+n)$  সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$= a^{m+n}$

[**জটব্য :** এই নিয়মটিকে Fundamental Index Law বলে। এই নিয়মানুসারে  $p$  অথও ধনসংখ্যা হইলে  $a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n+p}$  হইবে।  
 উৎপাদকের সংখ্যা আরও থাকিলে এই নিয়মে কার্য হইবে।]

নিয়ম 2. To prove that  $a^m \div a^n = a^{m-n}$ , where  $m$  and  $n$  are positive integers and  $m$  is greater than  $n$ .

$a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{a \times a \times a \times \dots \dots m \text{ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত}}{a \times a \times a \times \dots \dots n \text{ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত}}$

$= a \times a \times a \times \dots \dots (m-n)$  সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$= a^{m-n}$

[**জটব্য :** এখানে নীচের সব  $a$ -গুলি উপরের  $n$ -সংখ্যক  $a$ -র সহিত কাটিয়া গিয়া উপরে এখনও  $(m-n)$  সংখ্যক  $a$  বাকী থাকিল। যনে রাখিবে ভাগে সূচকগুলি বিয়োগ করিতে হয়। এখানে যদি  $n$  বড় হইত, তবে  $\frac{1}{a^{n-m}}$  উত্তর হইত।]

[**জটব্য :** উপরের নিয়ম দুইটিতে সূচকগুলিকে  $(m, n)$  প্রভৃতি অথও ধনসংখ্যা ধরা হইয়াছে। ঐগুলি কিন্তু ঋণসংখ্যা বা ভগ্নাংশ হইলে

কোন রাশির ঐ সূচকবিশিষ্ট ঘাতের কোন অর্থ হয় কিনা দেখিতে হইবে।  
যথা—

(a)  $m$  যদি ঋণসংখ্যা (মনে কর  $-4$  হয়, তবে

$a^m = a^{-4} = a \times a \times a \times \dots$   $(-4)$  সংখ্যক  $a$  পর্যন্ত হইবে, কিন্তু ইহার কোন অর্থ হয় না। কারণ,  $a$ -কে  $-4$ -সংখ্যক বার লইয়া ক্রমিক গুণফল নির্ণয় করা যায় না।

(b) মনে কর  $m = \frac{1}{2}$ ; এক্ষেপে  $a^m = a^{\frac{1}{2}} = a \times a \times \dots$   $\frac{1}{2}$  সংখ্যক

উৎপাদক পর্যন্ত।

ইহারও কোন অর্থ হয় না। কারণ, কোন রাশিকে  $\frac{1}{2}$  বার লওয়া ও তাহাদের গুণফল নির্ণয় করার অর্থ হয় না।

(c) অনুরূপে  $m = -\frac{1}{2}$  বা  $m = 0$  হইলেও  $a^m$  অর্থহীন হইবে।  
একটি সূচকবিশিষ্ট রাশির অর্থ নিম্নে দেখ।

অনুজিজ্ঞাস্ত : (i) What is the value of  $a^0$  ?

আমরা জানি,  $a^m \times a^n = a^{m+n}$ , এখানে মনে কর  $n = 0$ .

অতএব,  $a^m \times a^0 = a^{m+0} = a^m$ ,  $\therefore a^0 = \frac{a^m}{a^m} = 1$ ,

[ অতঃপরালী :  $a^0 = a^{m-m} = \frac{a^m}{a^m} = 1$  ]

[ দ্রষ্টব্য : 0 সূচকবিশিষ্ট যে কোন সংখ্যার মান 1 হইবে। ]

(ii) ঋণাত্মক ( অর্থাৎ - চিহ্নযুক্ত ) সূচকের অর্থ নির্ণয় :—

Prove that  $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ .

$\therefore a^m \times a^n = a^{m+n}$ ,  $\therefore a^m \times a^{-m} = a^{m-m} (n = -m \text{ ধরিয়া})$   
 $= a^0 = 1$

$\therefore a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ .

[জট্টব্য : অতরূপে  $a^m = \frac{1}{a^{-m}}$ . কোন ঋণাত্মক সূচকযুক্ত সংখ্যা উহারই  
বনাম্বক সূচকযুক্ত অন্তোত্তিকের সমান অর্থাৎ  $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ ,  $\frac{1}{a^3} = a^{-3}$ .]

নিয়ম : (৩) To prove that  $(a^m)^n = a^{mn}$ .

[C. U. 11 D. B. '30, P. U. '29]

(1) যদি  $n$  অখণ্ড ধনসংখ্যা হয়, তবে

$(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times \dots \dots n$  সংখ্যক উৎ

$= a^{m+m+m+\dots} n$  সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$= a^{mn}$ .

অনুসিদ্ধান্ত : (a)  $(a^{mn})^p = a^{mnp}$ ,  $(a^n)^{mp} = a^{mnp}$ ,

(b) What is the meaning of  $a^{\frac{m}{n}}$ ?

:  $(a^{\frac{m}{n}})^n = a^m$ ,  $\therefore a^{\frac{m}{n}}$  কে  $a^m$  এর  $n^{\text{th}}$  root (অর্থাৎ  $n$ -তম মূল)

বলা যায়।

আবার,  $a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m$ ,  $\therefore a^{\frac{1}{n}}$  কে  $a$  এর  $n^{\text{th}}$  power

(অর্থাৎ  $n$  ঘাত) বলা যায়।

[জট্টব্য : কোন সংখ্যার সূচক ভগ্নাংশ হইলে ঐ সূচকের লবকে সংখ্যাটির  
ঘাত (power) এবং হরকে সংখ্যাটির মূল (root) ধরিতে হয়। সুতরাং

$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ ,  $a^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{a})^2 = (a^{\frac{1}{3}})^2$ , এবং  $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$ ,  $\sqrt[3]{a^4} = a^{\frac{4}{3}}$

এইভাবে লেখা যায়।]

(11) নিয়ম 3এ  $n$  একটি ভগ্নাংশ হইলে মনে কর  $n = \frac{p}{q}$  এবং  $p$  ও  $q$   
প্রত্যেকটি অখণ্ড ধনরাশি।

এক্ষেণে  $(a^m)^n = (a^m)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(a^m)^p}$  [উপরের অনুসিদ্ধান্ত দেখ।]

$= \sqrt[q]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{q}} = a^{mn}$ .

(ii) নিয়ম 3এ  $n$  যদি কোন ঋণরাশি হয়, তবে মনে কর  $n = -p$  এবং  
 $p$  একটি অখণ্ড ধনরাশি।

একশে,  $(a^m)^n = (a^m)^{-p} = \frac{1}{(a^{mp})}$  [ নিয়ম 2 এর অসুসিদ্ধান্ত (i) ]

$$= a^{-mp} = a^{-(n \cdot p)} = a^{mn}.$$

অতএব  $(a^m)^n = a^{mn}$  এই নিয়মটি সকল কাল সকল ক্ষেত্রেই সত্য প্রমাণিত হইল।

(iv) যদি  $a$  কোন ঋণরাশি এবং  $n$  উভয়ই অখণ্ড ধনসংখ্যা হয় তবে  $a^{-\frac{m}{n}}$  এর অর্থ নিম্নে

$$\therefore a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \quad \therefore a^{-\frac{m}{n}} \text{ বা } a^{\frac{-m}{n}} \text{ এর } n\text{-তম মূলের}$$

অন্যোক্তক বোঝায়।

[ জটিল্য :  $a$  কোন ঋণরাশি হইলে  $a^{\frac{m}{n}}$  অথবা  $a^{-\frac{m}{n}}$  এর দ্বারা কি বুঝায় তাহা পাঠ্যবহিত্ত বলিয়া এখানে আলোচিত হইল না। ]

নিয়ম 4. To prove that  $(ab)^m = a^m b^m$ . [C. U. '31 ; D.B.22]

$$\begin{aligned} (ab)^m &= ab \times ab \times ab \times \dots m \text{ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত} \\ &= (a \times a \times a \times \dots m \text{ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত}) \times \\ &\quad (b \times b \times b \times \dots m \text{ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত}) = a^m \times b^m = a^m b^m. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{নিয়ম 5. } \left(\frac{a}{b}\right)^m &= \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \dots m \text{ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত} \\ &= \frac{a \times a \times a \times \dots m \text{ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত}}{b \times b \times b \times \dots m \text{ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত}} = \frac{a^m}{b^m}. \end{aligned}$$

[ জটিল্য : উপরের নিয়মগুলিতে আমরা  $a^m$  এর অর্থ নিম্নলিখিত কয়েক ক্ষেত্রে আলোচনা করিয়াছি :—

- (1)  $a$  শূন্য ভিন্ন যে কোন ধনসংখ্যা বা ঋণসংখ্যা এবং  $m$  একটি অখণ্ড ধনসংখ্যা।
- (2)  $a$  শূন্য ভিন্ন যে কোন ধনসংখ্যা এবং  $m$  একটি ধনাত্মক ভগ্নাংশ।
- (3)  $a$  শূন্য ভিন্ন যে কোন ধনসংখ্যা বা ঋণসংখ্যা এবং  $m$  একটি অখণ্ড ঋণসংখ্যা।

(4)  $a$  শূন্য ভিন্ন ধনসংখ্যক এবং  $m$  একটি ঋণাত্মক ভগ্নাংশ

নিয়ম 6. যদি  $m$  একটি ধনাত্মক ভগ্নাংশ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,  $a^m b^m = (ab)^m$ .

মনে কর  $m = \frac{p}{q}$  ( $p$  ও  $q$  প্রকৃত ধনরাশি)

$$\text{এক্ষে, } (a^m b^m) = \left( a^{\frac{p}{q}} b^{\frac{p}{q}} \right)$$

$$\therefore (a^m b^m)^q = \left( a^{\frac{p}{q}} b^{\frac{p}{q}} \right)^q$$

$$= \left( a^{\frac{p}{q}} \right)^q \times \left( b^{\frac{p}{q}} \right)^q \quad [\text{নিয়ম 4 দেখ}]$$

$$= a^p \times b^p \quad [\text{নিয়ম 3 দেখ}]$$

$$= (ab)^p$$

$$\therefore a^m b^m = (ab)^{\frac{p}{q}} = (ab)^m.$$

নিয়ম 7. যদি  $m$  একটি ঋণাত্মক রাশি হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$$a^m b^m = (ab)^m.$$

মনে কর  $m = -p$  ( $p$  একটি ধনাত্মক রাশি)।

$$\text{এক্ষে, } a^m b^m = a^{-p} b^{-p} = \frac{1}{a^p} \times \frac{1}{b^p} \quad [\text{নিয়ম 2 (ii) দেখ}]$$

$$= \frac{1}{(ab)^p} = (ab)^{-p} = (ab)^m.$$

উদাহরণমালা 7

উদা. 1. Find the product of  $a^{\frac{1}{2}}$ ,  $a^{\frac{1}{4}}$ ,  $a$ .

$$a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}} \cdot a = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 1} = a^{\frac{7}{4}}.$$

উদা. 2. Find the value of  $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{6}} \div a^{\frac{2}{3}}$ .

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{2}{3}} = a^0 = 1.$$

উদা. 3. Simplify  $(x^2 y)^{\frac{1}{2}} \times (x^3)^{\frac{1}{2}} \times (x^{-4} y^{-1})^{\frac{1}{2}}$ .

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = x^{2 \times \frac{1}{2}} \cdot y^{1 \times \frac{1}{2}} \cdot x^{3 \times \frac{1}{2}} \cdot x^{-4 \times \frac{1}{2}} \cdot y^{-1 \times \frac{1}{2}}$$

$$= x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot y^{-2} = x^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} \cdot y^{\frac{1}{4} - 2} = x^2 \cdot y^{-\frac{7}{4}} = x^2 y^{-\frac{7}{4}}$$

$$= 1 \times y^{-\frac{7}{4}} = \frac{1}{y^{\frac{7}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{y^7}}$$

উদা. 4. Find the value of  $\sqrt[3]{27^2}$ .

$$\sqrt[3]{27^2} = (27^{\frac{2}{3}}) = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^{3 \times \frac{2}{3}} = 3^2 = 9.$$

উদা. 5. Find the value of  $32^{-\frac{4}{5}}$ .

$$32^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{32^{\frac{4}{5}}} = \frac{1}{(2^5)^{\frac{4}{5}}} = \frac{1}{2^{5 \times \frac{4}{5}}} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}.$$

উদা. 6. Simplify  $4a^{-\frac{3}{4}} \div 3b^{-\frac{2}{3}}$ .

$$4a^{-\frac{3}{4}} \div 3b^{-\frac{2}{3}} = \frac{4a^{-\frac{3}{4}}}{3b^{-\frac{2}{3}}} = \frac{4 \times \frac{1}{a^{\frac{3}{4}}}}{3 \times \frac{1}{b^{\frac{2}{3}}}} = \frac{4}{3} \times \frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{3}{4}}} = \frac{4^{\frac{2}{3}} b^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{3}{4}} a^{\frac{3}{4}}}.$$

[ **জটিল্য :** এখানে লবের 4 এর ঘাত-সূচক 1,  $-\frac{3}{4}$  নহে ; যদি  $(4a)^{-\frac{3}{4}}$  থাকিত, তবে 4 এর ঘাত-সূচকও  $-\frac{3}{4}$  হইত। হরে 3 এর ঘাত-সূচকও 1. ]

উদা. 7. Multiply

$$a^{-1} + a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}} + b^{-1} \text{ by } a^{-1} - a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}} + b^{-1}.$$

$$a^{-1} + a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}} + b^{-1}$$

$$a^{-1} - a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}} + b^{-1}$$

$$\hline a^{-2} + a^{-\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{2}} + a^{-1}b^{-1}$$

$$- a^{-\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{2}} - a^{-1}b^{-1} - a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{3}{2}}$$

$$+ a^{-1}b^{-1} + a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{3}{2}} + b^{-2}$$

$$\hline \text{শুণফল} = a^{-2}$$

$$+ a^{-1}b^{-1}$$

$$+ b^{-2}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{অথবা, } (a^{-1} + a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}} + b^{-1})(a^{-1} - a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}} + b^{-1}) \\
 &= \{(a^{-1} + b^{-1}) + a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}} - a^{-1}b^{-1}\} \\
 &= (a^{-1} + b^{-1})^2 - (a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}})^2 = a^{-2} + b^{-2} + 2a^{-1}b^{-1} - a^{-1}b^{-1} \\
 &= a^{-2} + a^{-1}b^{-1} + b^{-2}.
 \end{aligned}$$

উদা. 8. Divide  $x - 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} - y$  by  $x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}$ .

$$\begin{array}{r}
 x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \overline{) x - 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} - y} \\
 \underline{x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}} \\
 - x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} - y \\
 \underline{- x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} - y} \\
 0
 \end{array}$$

$\therefore$  নির্ণেয় ভাগফল  $= x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}$ .

উদা. 9. Find the product of

$$(x^{2^{n-1}} + y^{2^{n-1}})(x^{2^{n-1}} - y^{2^{n-1}}).$$

$$\begin{aligned}
 \text{প্রদত্ত রাশি} &= (x^{2^{n-1}})^2 - (y^{2^{n-1}})^2 = x^{2^{n-1} \times 2} - y^{2^{n-1} \times 2} \\
 &= x^{2^{n-1+1}} - y^{2^{n-1+1}} = x^{2^n} - y^{2^n}.
 \end{aligned}$$

[ জটিল্য :  $2n$  এবং  $2^n$  এক নহে।  $2n$  এর অর্থ  $n$  এর সহিত 2 এর গুণফল এবং  $2^n$  এর অর্থ 2 এর  $n$  ঘাত।  $2^{n-1} \times 2 = 2^{n-1+1} = 2^n$ , সুতরাং  $x^{2^{n-1}}$  কে বর্গ করিলে  $x^{2^n}$  হয়! ]



উদা. 10. Divide  $x^{2^n} - y^{2^n}$  by  $x^{2^{n-1}} + y^{2^{n-1}}$ . [C. U.]

$$\begin{aligned} \frac{x^{2^n} - y^{2^n}}{x^{2^{n-1}} + y^{2^{n-1}}} &= \frac{(x^{2^{n-1}})^2 - (y^{2^{n-1}})^2}{x^{2^{n-1}} + y^{2^{n-1}}} \\ &= \frac{(x^{2^{n-1}} + y^{2^{n-1}})(x^{2^{n-1}} - y^{2^{n-1}})}{x^{2^{n-1}} + y^{2^{n-1}}} = x^{2^{n-1}} - y^{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

উদা. 11. Factorize  $a + b$ .

$$a + b = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 + \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right).$$

উদা. 12. Simplify  $\left(\frac{a^i}{b^m}\right)^n \left(\frac{b^n}{c^i}\right)^m \left(\frac{c^m}{a^n}\right)^i$ . [C. U. '31]

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \frac{a^{i \cdot n}}{b^{m \cdot n}} \times \frac{b^{n \cdot m}}{c^{i \cdot m}} \times \frac{c^{m \cdot i}}{a^{n \cdot i}} = 1.$$

উদা. 13. Simplify  $(x^a)^{b-c} (x^b)^{c-a} (x^c)^{a-b}$ . [C. U. '33]

$$\begin{aligned} \text{প্রদত্ত রাশি} &= x^{a \cdot b - a \cdot c} \cdot x^{b \cdot c - a \cdot b} \cdot x^{a \cdot c - b \cdot c} \\ &= x^{a \cdot b - a \cdot c + b \cdot c - a \cdot b + a \cdot c - b \cdot c} = x^0 = 1. \end{aligned}$$

উদা. 14. Simplify  $\left(\frac{x^i}{x^m}\right)^{i+m} \cdot \left(\frac{x^m}{x^n}\right)^{m+n} \cdot \left(\frac{x^n}{x^i}\right)^{n+i}$ .

[C. U. '16, '21, '24; D. B. '25, '30; G. U. '48, '50]

$$\begin{aligned} \text{প্রদত্ত রাশি} &= (x^{i-m})^{i+m} \cdot (x^{m-n})^{m+n} \cdot (x^{n-i})^{n+i} \\ &= x^{i^2 - m^2} \cdot x^{m^2 - n^2} \cdot x^{n^2 - i^2} = x^{i^2 - m^2 + m^2 - n^2 + n^2 - i^2} = x^0 = 1. \end{aligned}$$

[জটিল্য:  $\frac{x^i}{x^m}$  এর অর্থ  $x^i$  কে  $x^m$  দ্বারা ভাগ। ভাগে সূচকের বিয়োগ

হয়, সুতরাং  $\frac{x^i}{x^m} = x^{i-m}$  হইল। এইভাবে করিতে হইবে।]

উদা. 15. Simplify

$$\left(\frac{x^a}{x^b}\right)a^2+ab+b^2\left(\frac{x^b}{x^c}\right)b^2+bc\left(\frac{x^c}{x^a}\right)c^2+ca+a^3. \quad [\text{C. U.}]$$

$$\begin{aligned} \text{প্রদত্ত রাশি} &= (x^{a-b})a^2+ab+b^2 \times (x^{b-c})b^2+bc+c^3 \times \\ &\quad \dots \times (x^{c-a})c^2+ca+a^3 \\ &= x^{a^3-b^3} \cdot x^{b^3-c^3} \cdot x^{c^3-a^3} = x^{a^3-b^3+b^3-c^3+c^3-a^3} \\ &= x^0 = 1. \end{aligned}$$

উদা. 16. Simplify  $\frac{(bc)^{b-c}(ca)^{c-a}(ab)^{a-b}}{(a^{b-c}b^{c-a}c^{a-b})^{-1}}. \quad [\text{D. '45}]$

$$\begin{aligned} \text{প্রদত্ত রাশি} &= b^{b-c} \cdot c^{b-c} \cdot c^{c-a} \cdot a^{c-a} \cdot a^{a-b} \cdot b^{a-b} \\ &\quad \times a^{b-c} \cdot b^{c-a} \cdot c^{a-b} \\ &= a^{a-b+b-c+c-a} \cdot b^{b-c+c-a+a-b+c-a} \cdot c^{b-c+c-a+a-b} \\ &= a^0 \cdot b^0 \cdot c^0 = 1 \times 1 \times 1 = 1. \end{aligned}$$

[উদ্ভব:  $\because \frac{1}{a^{-2}} = a^2$  হয়,  $\therefore$  এখানে সমগ্র হরের ঘাত ঋণাত্মক অর্থাৎ  $-1$  বলিয়া, তাহাকে লব করিয়া লিখিলে ঘাত ধনাত্মক হইবে।]

উদা. 17. Simplify  $\sqrt[b]{\frac{x^b}{x^c}} \times \sqrt[c]{\frac{x^c}{x^a}} \times \sqrt[a]{\frac{x^a}{x^b}}.$

[C. U. '20, '41; W. B. S. F. '52; D. B. '28, '49]

$$\begin{aligned} \text{প্রদত্ত রাশি} &= \sqrt[b]{x^{b-c}} \cdot \sqrt[c]{x^{c-a}} \cdot \sqrt[a]{x^{a-b}} \\ &= x^{\frac{b-c}{b}} \cdot x^{\frac{c-a}{c}} \cdot x^{\frac{a-b}{a}} = x^{\frac{b-c}{b} + \frac{c-a}{c} + \frac{a-b}{a}} \\ &= x^{\frac{ab-ac+bc-ac+ac-bc}{abc}} = x^{\frac{0}{abc}} = x^0 = 1. \end{aligned}$$

[উদ্ভব: প্রথমটি দেখ। Root-চিহ্নের ভিতরটি প্রথমে করিয়া হইল  $\sqrt[b]{x^{b-c}}$  ইহা দ্বারা বুঝায়  $bc^{\frac{1}{b}}$  root of  $x^{b-c}$  এবং উহাকে  $x^{\frac{b-c}{b}}$  এইভাবে লেখা যায়।]

উদা. 18. Simplify  $\frac{a^{\frac{3}{2}}+ab}{ab-b^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{y^2\sqrt{a}}{\sqrt{a-b}}$ . [C. U. '24]

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= \frac{a(a^{\frac{1}{2}}+b)}{b(a-b^{\frac{3}{2}})} \cdot \frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-b} = \frac{a(a^{\frac{1}{2}}+b)}{b(a^{\frac{1}{2}}+b)(a^{\frac{1}{2}}-b)} \cdot \frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-b} \\ &= \frac{a^{\frac{1}{2}}}{b(a^{\frac{1}{2}}-b)} \cdot \frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-b} = \frac{a-a^{\frac{1}{2}}b}{b(a^{\frac{1}{2}}-b)} \\ &= \frac{a^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}-b)}{b(a^{\frac{1}{2}}-b)} = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{b} = \frac{\sqrt{a}}{b}.\end{aligned}$$

[জটিল্য: এখানে  $a-b^2=(a^{\frac{1}{2}})^2-(b)^2=(a^{\frac{1}{2}}+b)(a^{\frac{1}{2}}-b)$  হইল।]

উদা. 19. Simplify  $\left\{\sqrt[3]{\frac{x^2}{y^4}} \times \sqrt{\frac{y^3}{x^5}}\right\}^{12} \times x^{22}$ . [M.U. 1894]

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= \left\{\frac{x^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{4}{3}}} \times \frac{y^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{5}{2}}}\right\}^{12} \times x^{22} = \frac{x^{\frac{2}{3} \times 12} \cdot y^{\frac{3}{2} \times 12}}{y^{\frac{4}{3} \times 12} \cdot x^{\frac{5}{2} \times 12}} \times x^{22} \\ &= \frac{x^8 y^{18} \times x^{22}}{y^{16} x^{30}} = \frac{x^{30} y^{18}}{y^{16} x^{30}} = y^{18-16} = y^2.\end{aligned}$$

উদা. 20. Simplify  $\sqrt[5]{a^8} \cdot \sqrt{a^8} \cdot \sqrt{a^{-8}}$ .

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= \sqrt[5]{a^8} \cdot \sqrt{a^8} \times a^{-4} = \sqrt[5]{a^8} \cdot \sqrt{a^4} = \sqrt[5]{a^8} \cdot a^2 \\ &= \sqrt[5]{a^{10}} = a^{\frac{10}{5}} = a^2.\end{aligned}$$

উদা. 21. Simplify  $\left\{\frac{4^{m+\frac{1}{4}} \times \sqrt{2 \cdot 2^m}}{2 \sqrt{2^{-m}}}\right\}^{\frac{1}{m}}$ . [C. U. '47]

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \left\{\frac{(2^2)^{m+\frac{1}{4}} \times \sqrt{2^{m+1}}}{2 \cdot 2^{-\frac{m}{2}}}\right\}^{\frac{1}{m}} = \left\{\frac{2^{2m+\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{m+1}{2}}}{2^{1-\frac{m}{2}}}\right\}^{\frac{1}{m}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left\{ \frac{2^{2m+\frac{1}{2}+\frac{m+1}{2}}}{2^{\frac{2-m}{2}}} \right\}^{\frac{1}{m}} = \left\{ 2^{2m+\frac{1}{2}+\frac{m+1}{2}-\frac{2-m}{2}} \right\}^{\frac{1}{m}} \\
 &= \left\{ 2^{\frac{4m+1+m+1-2+m}{2}} \right\}^{\frac{1}{m}} = \left\{ 2^3 \right\}^{\frac{1}{m}} = 2^3 = 8.
 \end{aligned}$$

উদা. 22. Simplify  $\frac{2^{m+1} \cdot 3^{2m-n} \cdot 5^{m+n} \cdot 6^n}{15^m \cdot 10^{n+2} \cdot 6}$  [P. U. 1918]

$$\begin{aligned}
 \text{এদন্ত রাশি} &= \frac{2^{m+1} \cdot 3^{2m-n} \cdot 5^{m+n} \cdot 2^n \cdot 3^n}{3^m \cdot 5^m \cdot 2^{n+2} \cdot 5^{n+2} \cdot 2^m \cdot 3^m} = \frac{2^{m+1} \cdot 3^{2m} \cdot 5^{m+n}}{3^{2m} \cdot 2^{2m} \cdot 5^{m+n+2}} \\
 &= 2^{m+1-2m-n-2} \cdot 5^{m+n-m-n-2} = 2^{-1} \cdot 5^{-2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5^2} = \frac{1}{50}.
 \end{aligned}$$

[জটিল্য :  $6^m = (2 \times 3)^m = 2^m \cdot 3^m$  এইভাবে লেখা যায়।]

উদা. 23. Simplify  $\frac{3^p 4^q 6^r}{2^{r+a} 12^{r+p}}$  [C. U. 1935]

$$\begin{aligned}
 \text{এদন্ত রাশি} &= \frac{3^p \cdot (2^2)^q \cdot 2^r \cdot 3^r}{2^{r+a} \cdot (2^2 \cdot 3)^{r+p}} = \frac{3^{p+r} \cdot 2^{2q+r}}{2^{r+a} \cdot 2^{2r+2p} \cdot 3^{r+p}} \\
 &= \frac{3^{p+r} \cdot 2^{2q+r}}{2^{3r+2p+a} \cdot 3^{r+p}} = 2^{2q+r-3r-2p-a} = 2^{a-2r-2p}
 \end{aligned}$$

উদা. 24. Simplify  $\frac{2^a (2^{a-1})^a}{2^{a+1} \cdot 2^{a-1}} \left\{ \frac{8^{\frac{a}{3}}}{4} \right\}^{-a}$  [E. B. S. B. 1951]

$$\begin{aligned}
 \text{এদন্ত রাশি} &= \frac{2^a \cdot 2^{a^2-a}}{2^{a+1+a-1}} \left\{ \frac{(2^3)^{\frac{a}{3}}}{2^2} \right\}^{-a} = \frac{2^{a+a^2-a}}{2^{2a}} \left\{ \frac{2^a}{2^2} \right\}^{-a} \\
 &= \frac{2^{a^2}}{2^{2a}} (2^{a-2})^{-a} = 2^{a^2-2a} \cdot 2^{-a^2+2a} = 2^{a^2-2a-a^2+2a} = 2^0 = 1.
 \end{aligned}$$

উদা. 25. Simplify  $\sqrt[3]{\frac{bc}{x^{\frac{b}{c}}}} \sqrt[3]{\frac{ca}{x^{\frac{c}{a}}}} \sqrt[3]{\frac{ab}{x^{\frac{a}{b}}}}$  [C.U. '38]

$$\text{এদন্ত রাশি} = \sqrt[3]{x^{\frac{b}{c}-\frac{b}{c}}} \sqrt[3]{x^{\frac{c}{a}-\frac{c}{a}}} \sqrt[3]{x^{\frac{a}{b}-\frac{a}{b}}}$$

$$\begin{aligned}
 &= bc \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{x^{b^2 - c^2}}} \cdot ca \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{x^{c^2 - a^2}}} \cdot ab \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{x^{a^2 - b^2}}} \\
 &= x^{\frac{b^2 - c^2}{2} + \frac{c^2 - a^2}{2} + \frac{a^2 - b^2}{2}} = x^{\frac{b^2 - c^2 + c^2 - a^2 + a^2 - b^2}{2}} \\
 &= x^{\frac{0}{2}} = x^0 = 1. \\
 &[ \text{উদ্য : } bc \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{x^{b^2 - c^2}}} = (x^{\frac{b^2 - c^2}{2}})^{\frac{1}{b^2 - c^2}} = x^{\frac{b^2 - c^2}{2} \cdot \frac{1}{b^2 - c^2}} ]
 \end{aligned}$$

উদা. 26. Simplify  $(1-a)^n + (1-a)^{n-1} - (1-a)^{n-2}$

[ এখানে হরে  $(1-a)$  এর বিভিন্ন ঘাত আছে, তন্মধ্যে  $n$  বৃহত্তম ঘাত, সুতরাং হরের ল. সা. গু.  $(1-a)^n$  হইবে। ]

$$\begin{aligned}
 \text{প্রদত্ত রাশি} &= \frac{a^2 + 2(1-a) - (1-a)^2}{(1-a)^n} = \frac{a^2 + 2 - 2a - 1 + 2a - a^2}{(1-a)^n} \\
 &= \frac{1}{(1-a)^n}
 \end{aligned}$$

[ জটিল্য : ভাগে ঘাতসূচকগুলির বিয়োগ হয়,  $\therefore (1-a)^n$  কে  $(1-a)^{n-1}$  দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল  $(1-a)^{n-n+1} = (1-a)^1 = 1-a$  হয়। ]

উদা. 27. Simplify  $\left(p^2 - \frac{1}{q^2}\right)^p \left(p - \frac{1}{q}\right)^{q-p} \cdot \left(q^2 - \frac{1}{p^2}\right)^q \left(q + \frac{1}{p}\right)^{p-q}$  [ B. U. 1891 ]

$$\text{প্রদত্ত ভগ্নাংশ} = \frac{\left(p + \frac{1}{q}\right)^p \left(p - \frac{1}{q}\right)^p \left(p - \frac{1}{q}\right)^{q-p}}{\left(q + \frac{1}{p}\right)^q \left(q - \frac{1}{p}\right)^q \left(q + \frac{1}{p}\right)^{p-q}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left(p + \frac{1}{q}\right)^p \left(p - \frac{1}{q}\right)^{p+q-p}}{\left(q - \frac{1}{p}\right)^a \left(q + \frac{1}{p}\right)^{a+p}} = \frac{\left(p + \frac{1}{q}\right)^p \left(p - \frac{1}{q}\right)^q}{\left(q - \frac{1}{p}\right)^a \left(q + \frac{1}{p}\right)^p} \\
&= \frac{\left(\frac{pq+1}{q}\right)^p \left(\frac{pq-1}{q}\right)^q}{\left(\frac{pq-1}{p}\right)^a \left(\frac{pq+1}{p}\right)^p} = \frac{(pq-1)^p}{q^p} \times \frac{(pq-1)^q}{q^q} \\
&= \frac{(pq+1)^p (pq-1)^q}{p^a} \times \frac{p^{p+q}}{(pq-1)^a (pq+1)^p} \\
&= \frac{p^{p+q}}{q^{p+q}} = \left(\frac{p}{q}\right)^{p+q}.
\end{aligned}$$

উদা. 28. Simplify :

$$\frac{1}{1+x^{b-a}+x^{c-a}} + \frac{1}{1+x^{a-b}+x^{c-b}} + \frac{1}{1+x^{a-c}+x^{b-c}}.$$

[C. U. '26, '40 ; D. B. '29 ; E. B. S. B. '5]

প্রথম পদের লব ও হরকে  $x^a$  দ্বারা, দ্বিতীয় পদের লব ও হরকে  $x^b$  দ্বারা, এবং তৃতীয় পদের লব ও হরকে  $x^c$  দ্বারা গুণ কবিয়া পাই, প্রদত্ত রাশি

$$\frac{x^a}{x^a+x^b+x^c} + \frac{x^b}{x^b+x^a+x^c} + \frac{x^c}{x^c+x^a+x^b} = \frac{x^a+x^b+x^c}{x^a+x^b+x^c} = 1.$$

[ দ্রষ্টব্য : এইরূপ অঙ্কে সব হরগুলি সমান করিবার জন্য কোন্টিকে কি দিয়া গুণ করিতে হইবে তাহা স্থির করিয়া লইবে। ]

উদা. 29. Simplify :

$$1 + \frac{1}{x^{a-r}+x^{a-p}} + \frac{1}{x^{r-p}+x^{r-a}} + \frac{1}{x^{p-a}+x^{p-r}}.$$

[ P. U. 1903 ]

$$\begin{aligned}
\text{প্রদত্ত রাশি} &= \frac{x^{-a}}{x^{-a}(1+x^{a-r}+x^{a-p})} + \frac{x^{-r}}{x^{-r}(1+x^{r-p}+x^{r-a})} \\
&\quad + \frac{x^{-p}}{x^{-p}(1+x^{p-a}+x^{p-r})}
\end{aligned}$$

$$= \frac{x^{-a}}{x^{-a} + x^{-r} + x^{-p}} + \frac{x^{-r}}{x^{-r} + x^{-p} + x^{-a}} + \frac{x^{-p}}{x^{-p} + x^{-a} + x^{-r}}$$

$$= \frac{x^{-p} + x^{-a} + x^{-r}}{x^{-p} + x^{-a} + x^{-r}} = 1.$$

### ২৩. সূচক সম্বন্ধীয় অভেদাবলী

#### উদাহরণমালা ৪

উদা. 1. If  $x^y = y^x$ , show that  $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}} = x^{\frac{x}{y}-1}$ ; and if  $x=2y$ , show that  $y=2$ . [C. U. '28, '49; A. U. '16; D. B. '50]

$$\because x^y = y^x, \therefore x^{\frac{y}{y}} = y^{\frac{x}{y}}, \text{ বা, } x = y^{\frac{x}{y}}$$

$$\text{এক্ষণে, } \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}} = \frac{x^{\frac{x}{y}}}{y^{\frac{x}{y}}} = \frac{x^{\frac{x}{y}}}{x} = x^{\frac{x}{y}-1}.$$

আবার,  $\because x=2y$ , এবং  $x^y = y^x$  (প্রদত্ত সর্ত)

$$\therefore x^y = y^x, \text{ বা } (2y)^y = y^{2y}, \text{ বা, } (2y)^y = (y^2)^y,$$

$$\therefore y^2 = 2y, \therefore y=2.$$

[জটিল্য : যদি  $a^x = b^x$  হয়, তবে  $a=b$ , এবং যদি  $a^x = a^y$  হয়, তবে  $x=y$  হইবে। অর্থাৎ দুইটি সমান সংখ্যা বা রাশির ঘাত শূন্য ভিন্ন একই থাকিলে তাহাদের মূলদ্বয় (অর্থাৎ যাহাদের ঘাত তাহারা) সমান হইবে। আবার যদি তাহাদের মূলদ্বয় (1 ভিন্ন) একই থাকে, তবে ঘাত দুইটি সমান হইবে। এখানে দেখ  $(2y)^y$  এবং  $(y^2)^y$  সমান বলিয়া এবং উভয়েরই ঘাত  $y$  বলিয়া উভয়ের মূল দুইটি অর্থাৎ  $2y$  এবং  $y^2$  সমান বুঝিতে হইবে।]

উদা. 2. If  $m=a^x$ ,  $n=a^y$  and  $a^z=(m^yn^x)^s$ ,  
show that  $xyz=1$ . [B. U. 1890]

এখানে  $a^z=(m^yn^x)^s=m^{ys}n^{xs}=(a^x)^{ys} \cdot (a^y)^{xs}$   
[  $m$  ও  $n$  এর মান বসাইয়া ]  
 $=a^{xys} \cdot a^{xys}=a^{2xys}$ , বা,  $a^z=a^{2xys}$   
 $\therefore 2xyz=2$ ,  $\therefore xyz=1$ .

উদা. 3. If  $a^x=b$ ,  $b^y=c$ ,  $c^z=a$ , prove that  $xyz=1$ . [C. U. 1906]

এখানে  $a=c^z=(b^y)^z=b^{yz}=(a^x)^{yz}=a^{xyz}$ ,  
বা,  $a^1=a^{xyz}$ ,  $\therefore xyz=1$ .

উদা. 4. If  $a^x=b^y$  and  $b^x=a^y$ , then  $a=b$ .

$\therefore a^x=b^y \dots \dots (1)$  এবং  $a^y=b^x \dots \dots (2)$

$\therefore (1) \times (2)$  করিয়া পাই  $a^{x+y}=b^{x+y}$ ,  $\therefore a=b$ .

(উদা. 5) If  $x^{\frac{1}{a}}=y^{\frac{1}{b}}=z^{\frac{1}{c}}$  and  $xyz=1$ , prove that  $a+b+c=0$   
 $x^{\frac{1}{a}}=y^{\frac{1}{b}}=z^{\frac{1}{c}}=k$  ( মনে কর )

$\therefore (x^{\frac{1}{a}})^a=k^a$ , বা,  $x=k^a$ ,

অনুরূপে  $y=k^b$  এবং  $z=k^c$ .

আবার,  $\therefore xyz=1$ ,  $\therefore k^a \cdot k^b \cdot k^c=1$ , বা,  $k^{a+b+c}=1=k^0$ ,

$\therefore a+b+c=0$ .

উদা. 6. If  $a=x^{a+r}y^p$ ,  $b=x^{r+p}y^q$ ,  $c=x^{p+q}y^r$ ,  
show that  $a^{a-r} \cdot b^{b-p} \cdot c^{c-q}=1$ . [C. U. '51]

$a^{a-r} \cdot b^{b-p} \cdot c^{c-q}=(x^{a+r}y^p)^{a-r} \cdot (x^{r+p}y^q)^{b-p} \cdot (x^{p+q}y^r)^{c-q}$   
 $=x^{q^2-r^2} \cdot y^{pq-pr} \cdot x^{r^2-p^2} \cdot y^{qr-pq} \cdot x^{p^2-q^2} \cdot y^{rp-rq}$   
 $=x^{q^2-r^2+r^2-p^2+p^2-q^2} \cdot y^{pq-pr+qr-pq+pr-rq}$   
 $=x^0 \cdot y^0=1 \times 1=1$ .



উদা. 7. If  $x = 3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}$ , prove that  $3x^3 + 9x = 8$ . [Pat. '30]

$$\begin{aligned} \text{এখানে } x^3 &= \left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}\right)^3 \\ &= \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^3 - 3 \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{-\frac{1}{3}} \left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}\right) \end{aligned}$$

$$\text{বা, } x^3 = 3 - 3^{-1} - 3 \cdot 3^0(x) \quad \left[ \because 3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}} = x \right]$$

$$\text{বা, } x^3 = 3 - 3x, \text{ বা, } x^3 = \frac{8}{3} - 3x, \text{ বা, } 3x^3 = 8 - 9x \\ \therefore 3x^3 + 9x = 8.$$

উদা. If  $x = 2 + 2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}$ , prove that  $x^3 - 6x^2 + 6x - 2 = 0$   
[C. U. '30, '36, '42, '50 ; D. B. '42]

$$\therefore x = 2 + 2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}},$$

$$\therefore x - 2 = 2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}, \therefore (x - 2)^3 = \left(2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}\right)^3$$

$$\begin{aligned} \text{বা, } x^3 - 6x^2 + 12x - 8 &= \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^3 + \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3 + 3 \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \left(2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}\right) \\ &= 2^2 + 2 + 3 \cdot 2 \cdot (x - 2) \quad \left[ \because x - 2 = 2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} \right] \end{aligned}$$

$$\text{বা, } x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 6 + 6x - 12$$

$$\text{বা, } x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - 6 - 6x + 12 = 0$$

$$\therefore x^3 - 6x^2 + 6x - 2 = 0.$$

উদা. 9. If  $a^{m^n} = (a^m)^n$ , find  $m$  in terms of  $n$ . [Pat. 18]

$$\therefore a^{m^n} = (a^m)^n \quad \therefore a^{m^n} = a^{mn} \quad \therefore m^n = mn,$$

$$\text{বা, } \frac{m^n}{m} = n, \quad \text{বা, } m^{n-1} = n, \therefore m = n^{\frac{1}{n-1}}.$$

1. 10. If  $p^x = q^y = r^z$  and  $q^2 = pr$ ,

$$\text{show that } \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{y}.$$

[এখানে প্রথমে  $p$  ও  $r$  কে  $q$  এর term-এ প্রকাশ কর।]

$$\therefore p^x = q^y, \therefore p = q^{\frac{y}{x}}, \text{ এবং } \therefore r^x = q^y, \quad r = q^{\frac{y}{x}}$$

$$\text{আবার, } \therefore q^2 = pr, \therefore q^2 = q^{\frac{y}{x}} \cdot q^{\frac{y}{x}} = q^{\frac{y}{x} + \frac{y}{x}}$$

$$\therefore \frac{y}{x} + \frac{y}{x} = 2, \therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{y} \quad [y \text{ দ্বারা ভাগ করিয়া}]$$

উদা. (11) Prove that  $(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4) \dots$

$$(x^{2^{n-1}} + y^{2^{n-1}}) = \frac{x^{2^n} - y^{2^n}}{x - y} \quad [C. U. 1945]$$

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4) \dots (x^{2^{n-1}} + y^{2^{n-1}})}{x-y}$$

$$= \frac{(x^2 - y^2)(x + y^2)(x^4 + y^4) \dots (x^{2^{n-1}} + y^{2^{n-1}})}{x - y}$$

$$= \frac{(x^4 - y^4)(x^4 + y^4) \dots (x^{2^{n-1}} + y^{2^{n-1}})}{x - y}$$

এইরূপে শেষ পর্যন্ত গুণ করা যাই,

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{(x^{2^{n-1}} - y^{2^{n-1}})(x^{2^{n-1}} + y^{2^{n-1}})}{x - y}$$

$$= \frac{(x^{2^{n-1}})^2 - (y^{2^{n-1}})^2}{x - y} = \frac{x^{2^n} - y^{2^n}}{x - y}$$

[ সূচকীয় সমীকরণ দ্বিঘাত সমীকরণ অধ্যায়ে দেখ। ]

### Exercise 6

Find the value of the following :—

1.  $27^{\frac{2}{3}}$     2.  $9^{-\frac{3}{2}}$     3.  $(\frac{1}{81})^{-\frac{5}{4}}$     4.  $\sqrt[3]{324}$  [P.U. '04]
5.  $243^{-\frac{2}{5}}$     6.  $\sqrt[4]{(625)^3}$

Simplify the following :

7.  $x^{-\frac{2}{3}} \div x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{1}{4}}$  8.  $\{(x^{-3})^{\frac{2}{3}}\}^{-\frac{1}{2}}$

9.  $8a^{-\frac{3}{4}} \div 6b^{-\frac{2}{3}} \times \frac{1}{2}ab$  10.  $x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{-\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{1}{2}} \div x^{\frac{7}{12}}$

11.  $(a^2b^2)^{-\frac{1}{6}} \times (a^2)^{\frac{1}{3}} \div (b^3)^{\frac{1}{6}}$  12.  $\frac{4^{-3} - 10^{-2}}{\frac{1}{2^{-2}} + \frac{1}{4^{-1}}}$

13.  $\sqrt[4]{a^2b^3} \div \sqrt[3]{a^4b^6} \times (a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{4}})^{-4}$

14.  $\sqrt[3]{b^6} \times \sqrt[4]{a^2b^{-8}}$  15.  $\sqrt[3]{a^4} \div \sqrt[5]{a^{-4}}$

16.  $\sqrt{a^2} \cdot \sqrt[3]{a^{-2}}$

17.  $(x^{-3}y^4)^{\frac{2}{3}} \div (\frac{x^2y^3}{x^{-3}y^4})^2$

18. (a).  $\left\{ \sqrt[3]{4} \times \frac{1}{\sqrt[6]{8}} \times \sqrt[12]{2^{-1}} \right\}^{\frac{1}{2}}$  [ Pat. '23 ]

18. (i) Multiply  $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} + 1$  by  $x^{\frac{1}{4}} + x^{-\frac{1}{4}} - 1$ ; [ C. U. '33 ]  
[ Pat. '29 ]

(ii) Divide  $a^2 + 6ac^{\frac{1}{3}} - 4b + 9c^{\frac{2}{3}}$  by  $a - 2b^{\frac{1}{2}} + 3c^{\frac{1}{3}}$ .

19. Find the product of  $(x^n - y^{-n})(x^n + y^{-n})$ .

20. Multiply  $a^{-m} + b^n$  by  $a^{-2m} - a^{-m}b^n + b^{2n}$ .

21. Divide  $x^{3^n} - y^{3^n}$  by  $x^{3^{n-1}} - y^{3^{n-1}}$ .

22. Resolve into factors  $a - b$ , which is the difference of  $m$  squares or cubes.

23. Factorize  $x^{2m} - y^{2n}$ .

Simplify the following :

24.  $\frac{x^{a+b} \cdot x^{a-b} \cdot x^{c-2a}}{x^{c-a}}$  [C. U. 1870]

25.  $(a+b)^m \times (a-b)^m \times (a^2 + b^2)^m$  [M. U. 1889]

26.  $(a^{n^2} - 1)^{\frac{n}{n+1}} \times \sqrt[n]{a^{2n}}$

-27.  $\{(x^{a+b-c} \times x^{a-b+c})^b\}^c$ . [M. U.]

28.  $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b} \div \left(\frac{x^a}{x^{a-b}}\right)^{\frac{a^2}{b}}$  [M. U. 1890]

29.  $\left(\frac{x^p}{x^q}\right)^{p+q} \div \left(\frac{x^{p+q}}{x^{p-q}}\right)^{\frac{p^2}{q}}$  [C. U. 1902]

30.  $\left(\frac{x^m}{x^n}\right)^{m+n-l} \times \left(\frac{x^n}{x^l}\right)^{n+l-m} \times \left(\frac{x^l}{x^m}\right)^l$

31.  $\left\{ \frac{(9^{n+1}) \sqrt{3} \cdot 3^n}{3 \sqrt{3^{2n}}} \right\}^{\frac{1}{n}}$  [C. U. '25; W. B. S. F. '58]

32.  $\left(\frac{x^{m^2+n^2}}{x^{-mn}}\right)^{m-n} \times \left(\frac{x^{n^2+l^2}}{x^{-nl}}\right)^{n-l} \times \left(\frac{x^{l^2+m^2}}{x^{-lm}}\right)^{l-m}$

33.  $\left(x^{\frac{b+c}{c-a}}\right)^{\frac{1}{a-b}} \times \left(x^{\frac{c+a}{a-b}}\right)^{\frac{1}{b-c}} \times \left(x^{\frac{a+b}{b-c}}\right)^{\frac{1}{c-a}}$

34.  $\frac{(p+\frac{1}{q})^{m(p-\frac{1}{q})^n}}{(q+\frac{1}{p})^{m(q-\frac{1}{p})^n}}$  [B. U.]

35.  $a^{-c} \sqrt{x^{\frac{1}{a-b}}} \times b^{-a} \sqrt{x^{\frac{1}{b-c}}} \times c^{-b} \sqrt{x^{\frac{1}{c-a}}}$

36.  $\frac{2^{m+2} \cdot 3^{2m-n} \cdot 5^{m+n+2} \cdot 6^n}{6^m \cdot 10^{n+2} \cdot 15^m}$  [G. U. '51]

37.  $\frac{2^n \cdot 6^{m+1} \cdot 10^{m-n} \cdot 15^{m+n-2}}{4^m \cdot 3^{2m+n} \cdot 25^{m-1}}$  [P. U. '20]

38.  $\frac{e^{2a} + e^{-a} - e^a - 1}{e^{2a} - e^{-a} + e^a - 1}$

39.  $\frac{1}{1+x^{m-n}+x^{m-2n}+1+x^{n-p}+x^{n-m}+1+x^{p-m}+x^{p-n}+1}$   
[C. U. '37, '42; G. U. '49; E. B. S. B. '51]

40.  $(1+x^{a-b}+x^{a-c})^{-1} + (1+x^{b-c}+x^{b-a})^{-1} + (1+x^{c-a}+x^{c-b})^{-1}$

$$41. \frac{\left\{ (a^m)^{\frac{1}{r}} (a^a)^{\frac{1}{n}} \right\}^{nr}}{\left\{ a\sqrt[n]{b^m} (m\sqrt{b})^r \right\}^{ma}} \div \left\{ \left( \frac{a}{b} \right)^a \right\}^r. \quad [D. B. '23, '50]$$

$$42. \frac{1}{(1-x)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{x+1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$42. \left( a^{\frac{1}{u}} \right)^{u-\frac{1}{v}} \times \left( a^{\frac{1}{v}-\frac{1}{s}} \right)^{v-\frac{1}{x}} \times \left( a^{\frac{1}{s}-\frac{1}{x}} \right)^{s-\frac{1}{y}}. \quad [W. B. S. F. '53]$$

$$43. \left[ \frac{1}{b(4x^3-3x)^2} \right] \left[ \frac{3\sqrt{1-x^2}}{x} - \frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^3} \right] \left[ \frac{1-3\left(\frac{1-x^2}{x^2}\right)}{1-3\left(\frac{1-x^2}{x^2}\right)} \right]. \quad [C. U.]$$

$$44. \text{ If } m^n = n^m, \text{ show that } \left( \frac{m}{n} \right)^{\frac{m}{n}} = m^{\frac{m}{n}-1}.$$

$$45. \text{ If } x^2 = y^3, \text{ prove that } \left( \frac{x}{y} \right)^{\frac{2}{3}} + \left( \frac{y}{x} \right)^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{1}{2}} + y^{-\frac{1}{3}}.$$

$$46. \text{ If } a^x = z^y \text{ and } a^z = z^x, \text{ then } x^2 = yz.$$

$$47. \text{ If } (x^{n^2})^n = (x^{2^n})^2, \text{ then } \sqrt[n+1]{n^3} = 2.$$

$$48. \text{ If } p = a^x, q = a^y \text{ and } (p^y q^x)^z = a^2, \text{ prove that } xyz = 1. \quad [C. U. '29, '50; D. B. '37; Pat '19, '21]$$

$$49. \text{ If } x^{\frac{1}{a}} = y^{\frac{1}{b}} = z^{\frac{1}{c}} \text{ and } xyz = 1, \text{ prove that } a + b + c = 0.$$

$$50. \text{ If } x = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}, \text{ show that } 2x^3 - 6x = 5.$$

$$51. \text{ If } x = 1 + 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}, \text{ prove that } x^3 - 3x^2 - 6x - 4 = 0.$$

$$52. \text{ If } y = x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}, \text{ then } y^3 + 3y = x - \frac{1}{x}.$$

$$53. \text{ If } x^a = y^b = z^c \text{ and } y^2 = xz, \text{ prove that } \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}.$$

$$54. \text{ If } x^p = (x\sqrt{p})^q, \text{ find } p \text{ in terms of } q.$$

## Surd (করনী)

24. **অমের সংখ্যা :** আমরা দেখিতে পাই সকল সময়ে সমজাতীয় দুইটি রাশিকে উভয়ের কোন সাধারণ এককের (unit) দ্বারা প্রকাশ করা সম্ভব হয় না। 1 ইঞ্চি বাহুবিশিষ্ট বর্গের কর্ণ  $\sqrt{2}$  ইঞ্চি দীর্ঘ। এখানে  $\sqrt{2}$  এর মান যে-কোন দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত নির্ণয় করা যায় বটে, কিন্তু সেই মানকে কখনও একের ঠিক সম্পূর্ণ গুণিতক বা অংশরূপে প্রকাশ করা যায় না। অতএব,  $\sqrt{2}$  ইঞ্চি একটি অমের (incommensurable) রাশি। এইরূপ রাশিকে অমের রাশি বলে।

25. **করনী :** যদি কোন রাশির কোন মূল সম্পূর্ণরূপে নির্ণয় করা না যায়, তবে সেই মূলকে করনী (surd) বা অমূলদ রাশি (irrational quantity) বলে। যথা—(i)  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt[3]{4}$  ইহারা করনী বা অমূলদ রাশি; (ii)  $\sqrt{a}$ ,  $\sqrt[3]{x}$  এই বীজগণিতীয় রাশির মান ঠিকভাবে নির্ণয় করা যায় না সুতরাং ইহাদিগকেও করনী বলে। হয়ত  $a$  ও  $x$ -এর মান এরূপ হইতে পারে যে  $\sqrt{a}$  ও  $\sqrt[3]{x}$  প্রকৃতপক্ষে করনী নহে, তথাপি  $\sqrt{a}$  ও  $\sqrt[3]{x}$ কে করনী বলা হয়। সকল করনীই অমের।

**জটিল্য :** যে সংখ্যাকে দুইটি পূর্ণ সংখ্যার অল্পপাতে প্রকাশ করা যায় না তাহাকেই অমূলদ সংখ্যা বলে। যথা,  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt[3]{4}$  ইত্যাদি।

26. **মূলদ সংখ্যা :** যে সংখ্যাকে দুইটি পূর্ণ সংখ্যার অল্পপাতে প্রকাশ করা যায় তাহাকে মূলদ সংখ্যা (rational number) বলে। যথা,  $\sqrt{4}$ ,  $\sqrt[3]{27}$ ,  $\sqrt[4]{16}$ , ইত্যাদি। এখানে দেখ  $\sqrt{4}$ ,  $\sqrt[3]{27}$  ও  $\sqrt[4]{16}$ কে করণীর আকারে দেখা গেলেও উহারা প্রকৃতপক্ষে মূলদ সংখ্যা—করনী নহে। কারণ,  $\sqrt{4}=2$ ,  $\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$ ,  $\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$ , সুতরাং উহারা মূলদ সংখ্যা।

27. **শুদ্ধ ও মিশ্র করনী :** যে করনীতে কোন মূলদ উপাদক থাকে না তাহাকে শুদ্ধ করনী (pure surd) বলে। যথা,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$  ইত্যাদি।

আর যে কবণীতে কোন মূলদ উৎপাদক থাকে, তাহাকে মিশ্র করণী (mixed surd) বলে। যথা,  $2\sqrt{3}$ ,  $5\sqrt{7}$  ইত্যাদি।

28. সরল ও যৌগিক করণী : একটি মাত্র পদবিশিষ্ট করণীকে সরল করণী (simple surd) বলে। যথা,  $\sqrt{3}$ ,  $3\sqrt{5}$  ইত্যাদি। আর একাধিক করণী যদি, '+' বা '-' চিহ্ন দ্বারা সংযুক্ত থাকে, তবে সেই রাশিকে যৌগিক করণী (compound surd) বলে। যথা,  $\sqrt{3}+3\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{15}-\sqrt{3}$ ,

দুইটি করণী বা একটি করণী ও একটি মূলদ সংখ্যার বীজগণিতীয় সমষ্টিকে দ্বিপদ করণী (Binomial surd) বলে। যথা,  $2\sqrt{3}+\sqrt{5}$ ,  $3+2\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{7}-\sqrt{2}$ , ইত্যাদি।

এরূপে  $\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}$ ,  $3+\sqrt{7}-\sqrt{2}$  প্রভৃতিকে ত্রিপদ করণী (Trinomial surd) বলে।

29. দ্বিপদবিশিষ্ট দুইটি করণীতে যদি পদ দুইটি একই হয় এবং উহাদের মধ্যবর্তী সংযোগ চিহ্নটি যদি পরস্পর বিপরীত (অর্থাৎ একটিতে '+' ও অন্যটিতে '-') হয়, তবে একটি করণীকে অন্য করণীটির অঙ্গুবন্ধী করণী (conjugate surd) বা পূরক করণী (complementary surd) বলে। যথা,  $\sqrt{5}+\sqrt{3}$  ও  $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ ;  $\sqrt{a}+\sqrt{b}$  ও  $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ ।

30. করণীর ক্রম (Order) : করণীর মূল-সূচক সংখ্যা দ্বারা ইহার ক্রম প্রকাশিত হয়। যথা,  $\sqrt{3}$  ও  $2^{\frac{1}{2}}$  দ্বিতীয় ক্রমের (second order) করণী বা দ্বিঘাত (quadratic) করণী। এরূপ  $\sqrt[3]{4}$  ও  $5^{\frac{2}{3}}$  তৃতীয় (third) ক্রমের বা ত্রিঘাত (cubic) করণী।  $a$  হইলে  $n$ -তম ক্রমের করণী, ইত্যাদি।

31. সমমূলীয় করণী : কতকগুলি করণী একই ক্রমের হইলে তাহা-দিগকে সমমূলীয় (equiradical) করণী বলা হয়।

$\sqrt{\quad}$ ;  $\sqrt[3]{\quad}$ , প্রভৃতি চিহ্নগুলিকে radical sign বলে।

বিভিন্ন ক্রমের করগীকে সমমূলীয় করগীতে প্রকাশ করা যায়।

উদা. 1.  $\sqrt[3]{x^2}$  ও  $\sqrt[4]{x^3}$ কে সমমূলীয় করগীতে পরিণত করা।

এখানে মূলজ্ঞাপক সংখ্যাগুলি 3 ও 4 উহাদের ল সা. গু. = 12.

$$\therefore \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2 \times 4}{3 \times 4}} = x^{\frac{8}{12}} = \sqrt[12]{x^8}$$

$$\text{এবং } \sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{3 \times 3}{4 \times 3}} = \sqrt[12]{x^9}$$

∴ নির্ণয় করগীগুলি হইল  $\sqrt[12]{x^8}$  ও  $\sqrt[12]{x^9}$ .

কোন মূলদ রাশিকে যে-কোন ক্রমের করগীতে প্রকাশ করা যায়। যথা,

$$x = \sqrt{x^2} = \sqrt[3]{x^3} = \sqrt[4]{x^4} = \sqrt[n]{x^n}$$

22. করগীর তুলনা : বিভিন্ন ক্রমের করগীর মধ্যে পরস্পর তুলনা করিয়া মানের ক্রম নির্ণয় করিতে হইলে করগীগুলিকে সমমূলীয় করগীতে পরিণত কবিতে হয়।

উদা. 1.  $\sqrt{5}$ , ও  $\sqrt[3]{9}$  ইহাদের মধ্যে কোনটি বৃহত্তর ?

$$\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6]{125}$$

$$\text{এবং } \sqrt[3]{9} = 9^{\frac{1}{3}} = 9^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{9^2} = \sqrt[6]{81}$$

∴  $125 > 81$ , ∴  $\sqrt[6]{125}$  অর্থাৎ  $\sqrt{5}$  বৃহত্তর।

উদা. 2.  $\sqrt[3]{3}$ ,  $\sqrt{2}$  এবং  $\sqrt[4]{8}$ কে মানের ক্রম অনুসারে লিখ।

এখানে মূলজ্ঞাপক সংখ্যাগুলির অর্থাৎ 3, 2, 4 এর ল সা. গু. = 12.

$$\text{এক্ষণে, } \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{4}{12}} = \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[12]{81}$$

$$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{6}{12}} = \sqrt[12]{2^6} = \sqrt[12]{64}$$

$$\sqrt[4]{8} = 8^{\frac{1}{4}} = 8^{\frac{3}{12}} = \sqrt[12]{8^3} = \sqrt[12]{512}$$

∴ মানের অধঃক্রম অনুসারে সাজাইলে হইবে  $\sqrt[3]{3}$ ,  $\sqrt[4]{8}$ ,  $\sqrt{2}$ .

23. করগীর সরলতম আকার : কোন কোন করগীকে একটি মূলদ রাশি ও একটি করগীর গুণফলরূপে প্রকাশ করা যায়। এইরূপে পরিবর্তিত আকারকে করগীটির সরলতম আকার (simplest form) বলে।



আবার, কোন মূলদরাশি ও একটি করণীর গুণফলকে একটি পূর্ণ করণীরূপে প্রকাশ করা যায়।

উদা. 1.  $\sqrt{128}$  ও  $\sqrt[3]{192}$ কে সরলতম আকারে পরিণত কর।

$$\begin{aligned}\sqrt{128} &= \sqrt{64 \times 2} = \sqrt{8^2 \times 2} = (8^2 \times 2)^{\frac{1}{2}} = (8^2)^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} \\ &= 8 \times 2^{\frac{1}{2}} = 8\sqrt{2};\end{aligned}$$

$$\sqrt[3]{64 \times 3} = \sqrt[3]{4^3 \times 3} = 4\sqrt[3]{3}.$$

উদা. 2.  $\sqrt{2}$  এবং  $2\sqrt[3]{3}$ কে পূর্ণ করণীরূপে প্রকাশ কর।

$$3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \times 2} = \sqrt{9 \times 2} = 9^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} = (18)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{18};$$

$$2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3 \times 3} = \sqrt[3]{8 \times 3} = \sqrt[3]{8 \times 3} = \sqrt[3]{24}.$$

3. সদৃশ ও অসদৃশ করণী : যে সকল করণীর একই অমূলদ উৎপাদক থাকে, অথবা যে করণীগুলিকে একই অমূলদ উৎপাদক বিশিষ্টরূপে প্রকাশ করা যায়, তাহাদিগকে সদৃশ (similar or like) করণী বলে।

যে করণীগুলি এরূপ নহে, তাহাদিগকে অসদৃশ (dissimilar or unlike) করণী বলে। যথা—

(i)  $\sqrt{3}$ ,  $2\sqrt{3}$ ,  $5\sqrt{3}$  ইহারা সদৃশ করণী ; কারণ, এখানে প্রত্যেকটির অমূলদ উৎপাদক  $\sqrt{3}$ .

(ii)  $\sqrt{12}$  ও  $\sqrt{27}$  ইহারাও সদৃশ করণী ,

$$\text{কারণ } \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}, \text{ এবং } \sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = 3\sqrt{3}.$$

(iii)  $\sqrt{20}$  ও  $\sqrt{75}$  ইহারা অসদৃশ করণী ; কারণ,  $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$  এবং  $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ .

35. করণীর যোগ ও বিয়োগ : কতকগুলি করণীর যোগফল নির্ণয় করিতে হইলে প্রথমে সেইগুলিকে সরলতম আকারে পরিণত করিবে। যদি ঐগুলি সদৃশ করণী হয়, তবে উহাদের মূলদ উৎপাদকগুলির যোগফলের সহিত ঐ অমূলদ উৎপাদকটি গুণ করিলেই নির্ণেয় যোগফল পাওয়া যায়। আর যদি ঐ করণীগুলি অসদৃশ হয়, তবে উহাদের যোগফল একটি পদ হইবে না, ঐগুলি ‘+’ চিহ্ন দিয়া লিখিবে মাত্র। বিয়োগের নিয়মও এই।

উদা. 1.  $4\sqrt{2}$ ,  $3\sqrt{2}$ , ও  $6\sqrt{2}$  এর সমষ্টি কত ?

$$\text{নির্ণেয় সমষ্টি} = 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = (4+3+6)\sqrt{2} = 13\sqrt{2}.$$

উদা. 2.  $\sqrt{12}$ ,  $-4\sqrt{3}$  ও  $6\sqrt{3}$  এর সমষ্টি কত ?

$$\begin{aligned}\text{নির্ণেয় সমষ্টি} &= \sqrt{12} - 4\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 6\sqrt{3} \\ &= (2-4+6)\sqrt{3} = 4\sqrt{3}.\end{aligned}$$

উদা. 3.  $7\sqrt{2}$  ও  $\sqrt{32}$  এর অন্তর কত ?

$$7\sqrt{2} - \sqrt{32} = 7\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = (7-4)\sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$$

উদা. 4.  $2\sqrt{3}$ ,  $3\sqrt{2}$  এবং  $4\sqrt{3}$  এর যোগফল নির্ণয় কর।

$$\text{নির্ণেয় যোগফল} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + 4\sqrt{3} = 6\sqrt{3} + 3\sqrt{2}.$$

36. করণীর গুণন : (i) করণীগুলি সমমূলীয় হইলে, দেয় মূলদ ও অমূলদ উৎপাদকগুলির পৃথক পৃথক গুণ করিতে হয়। (ii) করণীগুলি বিবিধ ক্রমের হইলে, উহাদ্বিগকে সমমূলীয় করণীতে পরিণত করিয়া পূর্বের স্তায় গুণ করিতে হয়।

$$\text{উদা. 1. (a) } 3\sqrt{2} \times 4\sqrt{5} = 12\sqrt{10} \quad (b) \sqrt{3} \times \sqrt{3} = \sqrt{9} = 3.$$

$$\text{উদা. 2. } 4\sqrt{3} \times 5\sqrt{6} = 20\sqrt{18} = 20\sqrt{9 \times 2} = 20 \times 3\sqrt{2} = 60\sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned}\text{উদা. 3. } 2\sqrt{5} \times \sqrt{32} \times 3\sqrt{2} &= 2\sqrt{5} \times 4\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} \\ &= 24\sqrt{5 \times 2 \times 2} = 48\sqrt{5}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{উদা. 4. } 3^3\sqrt{3} \times 2^4\sqrt{2} &= 3^{12}\sqrt{3^4} \times 2^{12}\sqrt{2^3} = 6^{12}\sqrt{3^4 \times 2^3} \\ &= 6^{12}\sqrt{648}.\end{aligned}$$

(iii) মিশ্র করণীসমূহের গুণন : এইরূপ গুণনে বীজগণিতের মিশ্র রাশির গুণনের নিয়ম অনুসরণ করিতে হয়।

উদা. 1.  $2\sqrt{3} + 3\sqrt{4}$  কে  $3\sqrt{2} + \sqrt{3}$  দ্বারা গুণ কর।

$$\begin{aligned}\text{গুণফল} &= (2\sqrt{3} + 3\sqrt{4})(3\sqrt{2} + \sqrt{3}) = (2\sqrt{3} \times 3\sqrt{2}) \\ &\quad + (3\sqrt{4} \times 3\sqrt{2}) + (2\sqrt{3} \times \sqrt{3}) + (3\sqrt{4} \times \sqrt{3}) \\ &= 6\sqrt{6} + 9\sqrt{8} + 6 + 3\sqrt{12} = 6\sqrt{6} + 18\sqrt{2} + 6 + 6\sqrt{3}.\end{aligned}$$

১. ২.  $3\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$  কে  $2\sqrt{6} - 4\sqrt{3}$  দ্বারা গুণ কর ।

$$\begin{aligned}\text{গুণফল} &= (3\sqrt{2} \times 2\sqrt{6}) + (2\sqrt{5} \times 2\sqrt{6}) - (3\sqrt{2} \times 4\sqrt{3}) \\ &\quad - (2\sqrt{5} \times 4\sqrt{3}) \\ &= 6\sqrt{12} + 4\sqrt{30} - 12\sqrt{6} - 8\sqrt{15} \\ &= 12\sqrt{3} + 4\sqrt{30} - 12\sqrt{6} - 8\sqrt{15}.\end{aligned}$$

[ **উদ্য:**  $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$  হয়,  $\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$  হয়। সাধারণভাবে গুণ করিয়া গুণফল করণীগুলির সরলতম আকারে পরিণত করিতে হয়। ]

৩৭. **করণী-নিরসন (rationalisation) :** (১) কোন করণীকে অন্য কোন লব্ধি বা উপযুক্ত করণী দ্বারা গুণ করিয়া মূলদ রাশিতে পরিণত কবাকে করণী-নিরসন বলে। এই গুণক করণীকে করণী-নিরসক উৎপাদক বলে।

**উদা. ১.**  $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$  এবং  $5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}} = 5$ , সুতরাং  $\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$  হয়।

$\therefore \sqrt{5}$  কে  $\sqrt{5}$  দ্বারা বা  $5^{\frac{1}{2}}$  দ্বারা গুণ কবিলে করণী-নিরসন হয় এবং উহা মূলদ রাশিতে পরিণত হয়। এখানে করণী-নিরসক উৎপাদক  $\sqrt{5}$ ।

**উদা. ২.**  $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{2}{3}}$ ; কিন্তু  $2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} = 2$ , অর্থাৎ  $2^{\frac{2}{3}}$  কে  $2^{\frac{1}{3}}$  দ্বারা গুণ করিলে মূলদ সংখ্যা হয়।  $\therefore \sqrt[3]{4}$  কে  $\sqrt[3]{2}$  দ্বারা গুণ করিলে করণী-নিরসন হয়। এখানে  $\sqrt[3]{2}$  হইল করণী-নিরসক উৎপাদক।

(২) অমূলদ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশের হরকে মূলদ রাশিতে পরিণত করিয়া হরের করণী-নিরসন করা হয়। এইকণ করিতে হইলে হরকে যে করণী-নিরসক উৎপাদক দ্বারা গুণ করিবে, লবকেও তাহার দ্বারা গুণ করিতে হয়।

**উদা. ১.**  $\frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3 \times \sqrt{2}}{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

**উদা. ২.**  $\frac{2}{\sqrt[3]{3}} = \frac{2^1 \times \sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{3^2}} = \frac{2\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3^3}} = \frac{2\sqrt[3]{9}}{3}$ ;

**উদা. ৩.**  $\frac{3 + \sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}} = \frac{(3 + \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})}{(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})} = \frac{(3 + \sqrt{2})^2}{(3)^2 - (\sqrt{2})^2}$   
 $= \frac{9 + 2 + 6\sqrt{2}}{9 - 2} = \frac{11 + 6\sqrt{2}}{7}$

উদা. 4. 
$$\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}} = \frac{(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})}{(3\sqrt{3}+2\sqrt{2})(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})}$$
$$= \frac{(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})^2}{(3\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{2})^2} = \frac{27+8-12\sqrt{6}}{27-8} = \frac{35-12\sqrt{6}}{19}.$$

উদা 5. 
$$\frac{\sqrt{a+1} + \sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1} - \sqrt{a-1}} = \frac{(\sqrt{a+1} + \sqrt{a-1})^2}{(\sqrt{a+1} - \sqrt{a-1})(\sqrt{a+1} + \sqrt{a-1})}$$
$$= \frac{a+1+a-1+2\sqrt{a^2-1}}{(a+1)-(a-1)} = \frac{2a+2\sqrt{a^2-1}}{2} = a + \sqrt{a^2-1}.$$

38. করণীর ভাগ : করণীকে অত্র একটি করণী বা মিত্র করণী দ্বারা ভাগ করিতে হইলে ভাগটিকে ভগ্নাংশের আকারে লিখিয়া হরটিকে পূর্ববক্তার মূলদ রাশিতে পরিণত করিতে হয়।

### উদাহরণমালা 9

উদা 1. Find the value of  $3\sqrt{48}-4\sqrt{75}+5\sqrt{192}$ . [C.U '41]

প্রদত্ত রাশি  $= 3\sqrt{16 \times 3} - 4\sqrt{25 \times 3} + 5\sqrt{64 \times 3} = 3 \times 4\sqrt{3}$   
 $- 4 \times 5\sqrt{3} + 5 \times 8\sqrt{3} = 12\sqrt{3} - 20\sqrt{3} + 40\sqrt{3} = 32\sqrt{3}.$

উদা 2. Prove that  $\sqrt{175} - \sqrt{112} = \sqrt{7}$ . [C. U. '23]

$\sqrt{175} - \sqrt{112} = \sqrt{25 \times 7} - \sqrt{16 \times 7} = 5\sqrt{7} - 4\sqrt{7} = \sqrt{7}.$

উদা. 3 Find the value of  $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$  correct to 2 places of decimals, when  $\sqrt{2}=1.414$ .

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{2+1+2\sqrt{2}}{2-1} = 3+2\sqrt{2}$$
$$= 3+2 \times 1.414 = 3+2.828 = 5.828 = 5.83 \text{ (আনন্ন)।}$$

উদা. 4. Bring  $\frac{7}{\sqrt{2}+\frac{1}{2}+1}$  to a form with a rational denominator. [B. U.]

প্রদত্ত ভগ্নাংশ  $= \frac{7(\sqrt{2}+1-\frac{1}{2})}{(\sqrt{2}+1+\frac{1}{2})(\sqrt{2}+1-\frac{1}{2})}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{7(\sqrt{2}+1-\frac{1}{\sqrt{2}})}{(\sqrt{2}+1)^2 - (\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = \frac{7(\sqrt{2}+1-\frac{1}{\sqrt{2}})}{3+2\sqrt{2}-\sqrt{2}} = \frac{7(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}+1)}{3+\sqrt{2}} \\
 &= \frac{7(3-\sqrt{2})(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}+1)}{3^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{7(3-\sqrt{2})(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}+1)}{7} \\
 &= (3-\sqrt{2})(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}+1).
 \end{aligned}$$

উদা. 5. Show that  $\frac{a\sqrt{a+x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{x}} = a+x+\sqrt{ax+x^2}$ .

[B. U.]

$$\begin{aligned}
 \frac{a\sqrt{a+x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{x}} &= \frac{a\sqrt{a+x}(\sqrt{a+x}+\sqrt{x})}{(\sqrt{a+x})^2 - (\sqrt{x})^2} \\
 &= \frac{a(a+x) + a\sqrt{ax+x^2}}{a+x-x} = \frac{a(a+x) + \sqrt{ax+x^2}}{a} \\
 &= a+x+\sqrt{ax+x^2}.
 \end{aligned}$$

6 Simplify  $\frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)} - \frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}$ . [D. B. '28]

$$\begin{aligned}
 \text{প্রদত্ত রাশি} &= \frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{3}) \times \sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1) \times \sqrt{3}(\sqrt{3}-1)} \\
 &= \frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3}) \times \sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1) \times \sqrt{3}(\sqrt{3}+1)} = \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3(3-1)} - \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3(3-1)} \\
 &= \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}-3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}.
 \end{aligned}$$

উদা. 7. Evaluate  $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ , when  $x=3+2\sqrt{2}$ . [P. U. '28]

$\therefore x=3+2\sqrt{2}=2+1+2\sqrt{2}=(\sqrt{2}+1)^2, \therefore \sqrt{x}=\sqrt{2}+1.$

$\therefore \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{2}+1 - \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}+1 - \frac{\sqrt{2}-1}{2-1}$

$= \sqrt{2}+1 - (\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}+1 - \sqrt{2}+1 = 2.$

উদা. 8. Find the value of  $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2$

when  $x = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$ . [C. U.]

$$\therefore x = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}, \quad \therefore x^2 = \frac{n-1}{n+1},$$

$$\therefore x^2 - 1 = \frac{n-1}{n+1} - 1 = \frac{-2}{n+1}.$$

$$\begin{aligned} \text{একপে প্রদত্ত রাশি} &= \left(\frac{x}{x-1} + \frac{x}{x+1}\right)^2 - 2 \times \frac{x}{x-1} \times \frac{x}{x+1} \\ &= \left(\frac{x^2+x+x^2-x}{x^2-1}\right)^2 - 2 \cdot \frac{x^2}{x^2-1} = \left(\frac{2x^2}{x^2-1}\right)^2 - \frac{2x^2}{x^2-1} \end{aligned}$$

$$= \left\{ \frac{2(n-1)}{\frac{-2}{n+1}} \right\}^2 - \frac{2(n-1)}{\frac{-2}{n+1}} = \{-(n-1)\}^2 - \{-(n-1)\}$$

$$= (n-1)^2 + (n-1) = (n-1)(n-1+1) = n(n-1).$$

উদা. 9. Find the value of  $\sqrt[3]{a^3/b} \sqrt[3]{a^3/b} \dots$  continued to infinity. [B. U.]

মনে কর,  $x = \sqrt[3]{a^3/b} \sqrt[3]{a^3/b} \dots$  অসীম পর্যন্ত

$$\therefore x^2 = \sqrt[3]{a^3/b} \sqrt[3]{a^3/b} \dots \text{অসীম পর্যন্ত [ বর্গ করিয়া ]}$$

$$\therefore x^6 = a^3b \sqrt[3]{a^3/b} \dots \text{অসীম পর্যন্ত} = a^3bx \quad [\because \text{করগী অংশ} = x]$$

$$\therefore \frac{x^6}{x} = a^3b, \quad \text{বা, } x^5 = a^3b, \quad \therefore x = \sqrt[5]{a^3b},$$

$$\therefore \text{প্রদত্ত রাশি} = \sqrt[5]{a^3b}.$$

উদা. 10. Simplify  $\frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} - \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$ . [ B. U. ]

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^2 - (x - \sqrt{x^2 - 1})^2}{(x - \sqrt{x^2 - 1})(x + \sqrt{x^2 - 1})} = \frac{4x\sqrt{x^2 - 1}}{x^2 - (\sqrt{x^2 - 1})^2} \\ &= \frac{4x\sqrt{x^2 - 1}}{x^2 - (x^2 - 1)} = \frac{4x\sqrt{x^2 - 1}}{x^2 - x^2 + 1} = 4x\sqrt{x^2 - 1}.\end{aligned}$$

উদা. 11. If  $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , find the value of  $\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$ . [ B. U. ]

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})^2}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})} \\ &= \frac{1+x+1-x-2\sqrt{1-x^2}}{(\sqrt{1+x})^2 - (\sqrt{1-x})^2} = \frac{2-2\sqrt{1-x^2}}{1+x-(1-x)} = \frac{2(1-\sqrt{1-x^2})}{2x} \\ &= \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} = \frac{1-\sqrt{1-\frac{3}{4}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1-\sqrt{\frac{1}{4}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.\end{aligned}$$

উদা. 12. If  $x = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$  and  $y = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ ,

find the value of  $\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$ .

$$\text{এখানে } x+y = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} + \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2}{3-1} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\text{এবং } xy = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 1.$$

$$\therefore \frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2} = \frac{(x+y)^2 - xy}{(x+y)^2 - 3xy} = \frac{4^2 - 1}{4^2 - 3} = \frac{15}{13}.$$

ଉଦା 13. If  $x = \frac{\sqrt{a+2b} + \sqrt{a-2b}}{\sqrt{a+2b} - \sqrt{a-2b}}$ ,

prove that  $bx^2 - ax + b = 0$  [ D. B. '44 ]

ପ୍ରଦତ୍ତ ମୂଳ ହାତେ com & div. ଦ୍ଵାରା ପାଈ

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{2\sqrt{a+2b}}{2\sqrt{a-2b}} \quad \therefore \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} = \frac{a+2b}{a-2b} \quad [\text{ବର୍ଗ କରିବା}]$$

$$\text{ବା, } \frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1} = \frac{a+2b}{a-2b},$$

$$\frac{2(x^2+1)}{4x} = \frac{2a}{4b} \quad [\text{com. \& div ଦ୍ଵାରା}]$$

$$\text{ବା, } \frac{x^2+1}{x} = \frac{a}{b}, \text{ ବା, } bx^2+b=ax, \therefore bx^2-ax+b=0$$

✓ ଉଦା 14. Prove that  $\sqrt{y+\sqrt{2xy-x^2}} + \sqrt{y-\sqrt{2xy-x^2}} = \sqrt{2x}$ . [C. U. '27]

$$\begin{aligned} \therefore & (\sqrt{y+\sqrt{2xy-x^2}} + \sqrt{y-\sqrt{2xy-x^2}})^2 \\ &= y + \sqrt{2xy-x^2} + y - \sqrt{2xy-x^2} + 2\sqrt{y^2 - (\sqrt{2xy-x^2})^2} \\ &= 2y + 2\sqrt{y^2 - 2xy + x^2} = 2y + 2\sqrt{(x-y)^2} = 2y + 2(x-y) \\ &= 2y + 2x - 2y = 2x, \end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt{y+\sqrt{2xy-x^2}} + \sqrt{y-\sqrt{2xy-x^2}} = \sqrt{2x}.$$

### Exercise 7

✓ 1. Express  $\sqrt[3]{3}$  and  $\sqrt[4]{5}$  as surds of the same order.

2. Express 2,  $1\frac{1}{2}$  and  $x^2$  as surds of (i) the second (ii) the third order.

✓ 3. Which is greater  $\sqrt[3]{5}$  or  $\sqrt[4]{8}$ ?

✓ 4. Arrange the following in order of magnitude :-

(i)  $\sqrt[3]{4}$ ,  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt[4]{12}$  (ii) 3,  $\sqrt{8}$ ,  $\sqrt[3]{10}$  (iii)  $\sqrt[4]{9}$ ,  $\sqrt[5]{25}$ ,  $\sqrt[3]{8}$ .



5. Express the following as complete surds :—

$2\sqrt{5}, 3\sqrt[3]{2}, x^4\sqrt{y}.$

6. Reduce to the simplest form :—

(i)  $\sqrt{175}$  (ii)  $2\sqrt{112}$  (iii)  $5\sqrt{192}$  (iv)  $\sqrt[3]{375}$

(v)  $4\sqrt[3]{24} - 2\sqrt[3]{81}.$

7. Prove that  $\sqrt{108} - \sqrt{75} = \sqrt{3}.$

8. Show that  $\sqrt{98} + \sqrt{8} - 2\sqrt{32} = \sqrt{2}.$

9. Find the product of the following :—

(i)  $3\sqrt{2} \times \sqrt{3}$  (ii)  $2\sqrt{5} \times 3\sqrt{4}$  (iii)  $4\sqrt[3]{4} \times 2\sqrt[3]{2}.$

(iv)  $2\sqrt[3]{3} \times 3\sqrt{6}.$

10. Divide :—

(i)  $6\sqrt{5}$  by  $2\sqrt{2}$  (ii)  $4\sqrt[3]{4}$  by  $2\sqrt[3]{2}$  (iii)  $3\sqrt[4]{5} \div 6\sqrt[4]{4}.$

11. If  $\sqrt{2} = 1.414$ ,  $\sqrt{3} = 1.732$  and  $\sqrt{5} = 2.236$ , find the value of the following correct to 2 places of decimals :—

(i)  $2\sqrt[3]{2}$  (ii)  $\frac{4}{\sqrt{3}}$  (iii)  $\frac{15}{\sqrt{5}}$  (iv)  $\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{2}}$  (v)  $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}.$

12. Multiply : (i)  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  by  $\sqrt{2} - \sqrt{3}$

(ii)  $\sqrt{3} + \sqrt{7}$  by  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  (iii)  $2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$  by  $4\sqrt{2} + \sqrt{5}$

(iv)  $3\sqrt{5} - 2\sqrt{6}$  by  $2\sqrt{3} + \sqrt{5}$  (v)  $\sqrt{x} + \sqrt{y-x}$  by  $\sqrt{x} - \sqrt{y-x}$

(vi)  $\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}$  by  $\sqrt{a-b}$

(vii)  $\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{6}$  by  $\sqrt{3} + \sqrt{6} - \sqrt{5}$  (viii)  $x + \sqrt{y}$  by  $\sqrt{x-y}.$

13. Find the square of :—

(i)  $\sqrt{3} - \sqrt{2}$  (ii)  $2 - \sqrt{3}$  (iii)  $\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$

(iv)  $\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}$  (v)  $a - \sqrt{b^2 - a^2}$  (vi)  $\sqrt{2x+5} + \sqrt{2x-5}.$

14. Rationalise the denominators :—

(i)  $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$  (ii)  $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-1}$  (c)  $\frac{3\sqrt{2}+1}{2\sqrt{5}-1}$  (d)  $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}.$

Divide  $3 + \sqrt{6}$  by  $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ .

16. Find the value of  $\frac{2\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}$ , when  $\sqrt{5} = 2.236$ .

Simplify :—

$$17. \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} + \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$18. \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} - \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \quad [\text{B. U.}]$$

$$19. \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2} - \sqrt{3}} \quad [\text{B. U. 1888}]$$

$$20. \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{18} - \sqrt{(3 + \sqrt{5})}} - \frac{\sqrt{10} + \sqrt{18}}{\sqrt{18} - \sqrt{(3 - \sqrt{5})}} \quad [\text{M. U. 1892}]$$

$$21. \frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{a} + \sqrt{x} - \sqrt{a+x}} - \frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{a} + \sqrt{x} + \sqrt{a+x}} \quad [\text{M. U.}]$$

22. Evaluate  $\sqrt{x} \sqrt{x} \sqrt{x} \dots$  to infinity.

$$23. \text{ If } a = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} \text{ and } b = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1},$$

find the value of  $\frac{a^2 + ab + b^2}{a^2 - ab + b^2}$ .

$$24. \text{ Find the value of } \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}, \text{ when } x = 4 + 2\sqrt{3}.$$

$$25. \text{ If } x = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 - b^2}},$$

show that  $b^2 x^2 - 2a^2 x + b^2 = 0$ .

$$26. \text{ Prove that } \sqrt{a^2 + 2x} \sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{a^2 - 2x} \sqrt{a^2 - x^2} = 2a \quad [\text{U. 14 1911}]$$

$$27. \text{ Evaluate } a^6 + a^4 + a^2 + 1, \text{ when } a = \frac{1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}.$$

$$\left[ \text{Hints : } a^2 = \frac{1-1+2\sqrt{-1}}{2} = \sqrt{-1}, \quad \therefore a^4 = -1 \right]$$

(28) If  $r = (a + \sqrt{a^2 + b^3})^{\frac{1}{3}} + (a - \sqrt{a^2 + b^3})^{\frac{1}{3}}$ , find the value of  $x^3 + 3bx - 2a$ .

$$\begin{aligned} \text{[Hints : } x^3 &= a + \sqrt{a^2 + b^3} + a - \sqrt{a^2 + b^3} + 3(a + \sqrt{a^2 + b^3})^{\frac{1}{3}} \times \\ &\quad (a - \sqrt{a^2 + b^3})^{\frac{1}{3}} \{ (a + \sqrt{a^2 + b^3})^{\frac{1}{3}} + (a - \sqrt{a^2 + b^3})^{\frac{1}{3}} \} \\ &= 2a + 3\{a^2 - (\sqrt{a^2 + b^3})^2\}^{\frac{1}{3}} x = 2a + 3(a^2 - a^2 - b^3)^{\frac{1}{3}} x \\ &= 2a + 3(-b^3)^{\frac{1}{3}} x = 2a + 3 \cdot (-1)^{\frac{1}{3}} \cdot (b^3)^{\frac{1}{3}} x = 2a - 3bx \dots ] \end{aligned}$$

(29) If  $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} + z^{\frac{1}{3}} = 0$ , then  $(x + y + z)^3 = 27xyz$ .

30. If  $x = a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$ , prove that  $a(bx^3 - 3bx - a) = b^2$ .

[C. U. (D. M. H.) '51]

$$\left[ \text{Hints : } x^3 = ab^{-1} + a^{-1}b + 3a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{-\frac{1}{3}} \cdot a^{-\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}} (a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}) \right]$$

$$= \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 3a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}} \cdot a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 3x$$

$\therefore abx^3 = a^2 + b^2 + 3abx$  (উভয় পক্ষকে  $ab$  দ্বারা গুণ করিয়া),

বা,  $abx^3 - 3abx - a^2 = b^2$ ,  $\therefore a(bx^3 - 3bx - a) = b^2$ . ]

### Evolution (মূলকর্ষণ)

আমরা পূর্বে কোন রাশিকে কোন নির্দিষ্ট ঘাত বা শক্তিতে উন্নীত করিবার প্রক্রিয়া (involution) সম্বন্ধে আলোচনা করিয়াছি। এখানে আমরা উহাব বিপরীত প্রক্রিয়া মূলকর্ষণ সম্বন্ধে আলোচনা করিতেছি।

৪৭. মূল : একটি প্রদত্ত রাশির কোন মূল বলিলে এমন একটি রাশিকে বুঝায় যাহাকে ঐ মূলক-নির্দিষ্ট ঘাতে উন্নীত করিলে ঐ প্রদত্ত রাশিটি

পাওয়া যায়। যথা,  $\sqrt[3]{8}=2$  (এখানে দেখ 2কে ত্রিঘাতে উন্নীত করিলে ৮ হয়,  $\therefore$  ৪এর ঘনমূল ২)। আবার,  $\sqrt{a^2+2ab+b^2}=a+b$  এখানে দেখ,  $a+b$ কে দ্বিঘাতে উন্নীত করিলে  $a^2+2ab+b^2$  হয়,  $a^2+2ab+b^2$  এর বর্গমূল  $a+b$  হইল।

মূল সূচক চিহ্নকে ( $\sqrt{\phantom{x}}$ ,  $\sqrt[3]{\phantom{x}}$ , ইত্যাদি) radical sign বলে।

40 মূল্যাকর্ষণ : কোন রাশির নির্দিষ্ট মূল নির্ণয় করিবার প্রক্রিয়াকে মূল্যাকর্ষণ প্রক্রিয়া বলে। যথা, কোন সংখ্যা বা রাশির বর্গমূল, ঘনমূল বা  $n$ -তম মূল প্রভৃতি নির্ণয়। যথা—

উদা. 1.  $\sqrt{a^4}=\pm a^2$  [ কারণ  $(\pm a^2)^2=a^4$  ],

$$\sqrt{a^5}=\pm a^{\frac{5}{2}}$$
 [ কারণ  $(\pm a^{\frac{5}{2}})^2=a^5$  ]

$$\sqrt{16a^6}=\pm 4a^3.$$

দ্রষ্টব্য : উপরের দৃষ্টান্ত হইতে দেখা যাইতেছে যে (1) কোন ধনাত্মক রাশির বর্গমূল ধনাত্মক ও ঋণাত্মক দুইটি হইবে। কারণ  $(a^2)^2=a^4$  এবং  $(-a^2)^2=a^4$ , সুতরাং  $a^4$  এর বর্গমূল  $+a^2$  এবং  $-a^2$  দুইই হইবে। সাধারণতঃ ধনাত্মক মূলটি লেখা হয়। তোমরা দুইটিই লিখিবে।

আবার দেখ, কোন পদের বর্গমূলের ঘাত সেই পদের যে ঘাত আছে তার অর্ধেক হইবে। যথা,  $a^5$  এর বর্গমূল  $a^{\frac{5}{2}}$ ।

(11) পদের সাংখ্য-সহগের বর্গমূল পাটীগণিতের প্রণালীতে নির্ণয় করিয়া লইবে।

উদা. ২  $\sqrt[3]{x^6}=x^2$  [ কারণ  $(x^2)^3=x^6$  ]

$$\sqrt[3]{-x^6}=-x^2$$
 [ কারণ  $(-x^2)^3=-x^6$  ]

$$\sqrt[3]{27x^3y^6}=3xy^2.$$

দ্রষ্টব্য : উপরের দৃষ্টান্ত হইতে দেখা গেল যে,

(1) কোন পদের ঘনমূলের ঘাত পদটির ঘাতের এক-তৃতীয়াংশ ( $\frac{1}{3}$ ) হয়।

যথা,  $x^6$  এর ঘনমূল  $x^2$ ,  $x^5$  এর ঘনমূল  $x^{\frac{5}{3}}$ , ইত্যাদি।

(ii) ধনাত্মক পদের ঘনমূল কেবল ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক পদের ঘনমূল কেবল ঋণাত্মক হয়।

নিয়ম : বীজগণিতায় কোন ঘাতবিশিষ্ট পদের যে মূল নির্ণয় করিতে হইবে, সেই মূলের ঘাত হইবে প্রদত্ত ঘাতের ভূত অংশ।

$$\sqrt[4]{b^{20}} = \pm a^{\frac{20}{4}} = \pm a^5 ; \sqrt[5]{-x^{15}} = -x^{\frac{15}{5}} = -x^3.$$

অতএব, ক্রিয়ানুচক চিহ্নের নিয়ম ( Rule of signs ) অল্পসারে জানা যায় যে,

(i) কোন ধনাত্মক রাশির কোন যুগ্ম মূল ধনাত্মক ও ঋণাত্মক দুইটি হইবে।

(ii) কোন রাশির কোন অযুগ্ম মূল একটি হয়, ধনাত্মক বাশির অযুগ্ম মূল ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক রাশির অযুগ্ম মূল ঋণাত্মক হইয়া থাকে।

(iii) কোন ঋণাত্মক রাশির কখনই কোন যুগ্ম মূল থাকিতে পারে না।

## Square root ( বর্গমূল )

41. বর্গমূল : কোন সংখ্যাকে সেই সংখ্যা দ্বারা গুণ করিয়া যে গুণফল পাওয়া যায়, তাহাকে ঐ সংখ্যাটির বর্গ (square) বলে। আর ঐ সংখ্যাটিকে গুণফলটির বর্গমূল (square root) বলে। যথা,  $3 \times 3 = 9$ , এখানে 9কে 3এর বর্গ বলে, এবং 3কে 9এর বর্গমূল বলে। এইরূপে  $a^2$ এর বর্গমূল  $a$ ,  $x^6$ এর বর্গমূল  $x^3$ । অতএব, কোন রাশির বর্গমূল নির্ণয় করিতে হইলে এমন একটি রাশি বাহির করিতে হইবে যাহাকে ঐ রাশির দ্বারাই গুণ করিয়া গুণফলটি প্রদত্ত রাশির সমান হয়।

জটিল্য : বর্গমূল নির্ণয়ের সময় ঘাতের অর্ধেক বর্গমূলের ঘাত হয়। যথা,  $x^6$ এর বর্গমূল  $x^3$ ,  $x^7$ এর বর্গমূল  $x^{\frac{7}{2}}$ ,  $x^{-5}$ এর বর্গমূল  $x^{-\frac{5}{2}}$  ইত্যাদি।

## 42. বর্গমূল নির্ণয়ের সাধারণ প্রণালী

নিয়ম : এই নিয়ম পাটীগণিতের সংখ্যার বর্গমূল নির্ণয়ের অনুরূপ। প্রদত্ত রাশিমালাটি কোন অক্ষরের ( $a$ ,  $x$  প্রভৃতি) ঘাতের উৎকর্ষমে বা

অধঃক্রমে সাজান না থাকে, তবে প্রথমে ঐরূপে সাজাইয়া লও। তারপর সাজান রাশিটির প্রথম পদের বর্গমূল স্থির করিয়া তাহাকে ভাগফলের মত রাশিটির ডানদিকে লিখ। উহাই হইল নির্ণেয় বর্গমূলের প্রথম পদ। ঐ প্রথম পদের বর্গকে রাশিমালার প্রথম পদের নীচে রাখিয়া রাশিমালা হইতে বিয়োগ কর। ঐ বর্গমূলের প্রথম পদটির দ্বিগুণকে বিয়োগফলের বামদিকে ভাজকের মত করিয়া বসাত। তারপর ঐ বিয়োগফলের প্রথম পদকে ঐ ভাজকের প্রথম পদ দ্বারা ভাগ করিয়া বাহা হয় (মুখে মুখে স্থির করিয়া) তাহা বর্গমূলের দ্বিতীয় পদরূপে বসাত এবং বামদিকেও ভাজকের সঙ্গে বসাত (যোগ কর)। তারপর বামদিকের রাশিকে (ভাজককে) ঐ দ্বিতীয় পদ দ্বারা গুণ করিয়া পূর্বের বিয়োগফলটি হইতে বিয়োগ কর। এইবার বর্গমূলের পদ দুইটির দ্বিগুণ করিয়া পূর্বের ভ্রায় কাজ করিয়া যাও। যতক্ষণ কোন অবশিষ্ট থাকিবে ততক্ষণ এইরূপ প্রক্রিয়া চলিবে।  $\pm$  চিহ্নের পর বন্ধনীর মধ্যে প্রাপ্ত বর্গমূলটি লিখিবে।

### উদাহরণমালা 10

উদা. 1. Find the square root of  $x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 12x + 9$ .  
[C. U. '22]

$$\begin{array}{r}
 x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 12x + 9 \quad x^2 + 2x + 3 \\
 \underline{x^4} \\
 2x^2 + 2x \quad | \quad 4x^3 + 10x^2 + 12x + 9 \\
 \underline{4x^3 + 4x^2} \\
 2x^2 + 4x + 3 \quad 6x^2 + 12x + 9 \\
 \underline{6x^2 + 12x + 9} \\
 0
 \end{array}
 \quad \therefore \text{নির্ণেয় বর্গমূল} = \pm(x^2 + 2x + 3).$$

উদা. 2. Extract the square root of  $25x^{-2} - 12x + 16x^{-8} + 4x^4 - 24x^{-5}$ .  
[C. U. '12]

$$\begin{array}{r}
 4x^4 - 12x + 25x^{-2} - 24x^{-5} + 16x^{-8} \quad | \quad 2x^2 - 3x^{-1} + 4x^{-4} \\
 \underline{4x^4} \\
 4x^2 - 3x^{-1} - 12x + 25x^{-2} - 24x^{-5} + 16x^{-8} \\
 \underline{-12x + 9x^{-2}} \\
 4x^2 - 6x^{-1} + 4x^{-4} \quad 16x^{-2} - 24x^{-5} + 16x^{-8} \\
 \underline{16x^{-2} - 24x^{-5} + 16x^{-8}} \\
 0
 \end{array}$$

নির্ণেয় বর্গমূল  $= \pm(2x^2 - 3x^{-1} + 4x^{-4})$ .

Elc. M. (IX) A.—8

[জট্টব্য : এখানে প্রথমে  $x$ -এর ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে রাশিটিকে সাজান হইল।  $x$  অপেক্ষা  $x^{-2}$ এর ঘাত কম, কারণ  $x$ এ ঘাত সূচক 1 এবং  $x^{-2}$ এ ঘাত সূচক  $-2$ , ইহা 1 অপেক্ষা কম। আবার বর্গমূলের দ্বিতীয় পদ  $-3x^{-1}$  ক্রমে নির্ণয় করা হইল দেখ। এখানে  $-12x$ কে ভাজকের  $4x^2$  দ্বারা ভাগ করিয়া বর্গমূলের দ্বিতীয় পদ পাওয়া যাইবে।  $-12$ কে 4 দ্বারা ভাগ করিলে হয়  $-3$  এবং ভাগে ঘাতগুলির বিয়োগফল লইতে হয় বলিয়া  $x \div x^2$  করিয়া হইল  $x^{1-2} = x^{-1}$ । এইরূপে শেষবারে  $16x^{-2} \div 4x^2$  করিয়া হইল  $4x^{-2-2} = 4x^{-4}$ ।]

উদা. 3. Find the square root of  $\frac{x^2+y^2}{y^2+x^2} - 6\frac{x}{y} + 6\frac{y}{x} + 7$ .

[C. U. '11]

$$\begin{array}{r}
 \frac{x^2}{y^2} - \frac{6x}{y} + 7 + \frac{6y}{x} + \frac{y^2}{x^2} \quad \left| \begin{array}{l} x \\ y \\ -3 \\ -\frac{y}{x} \end{array} \right. \\
 \hline
 \frac{2x}{y} - 3 \quad \left| \begin{array}{l} -\frac{6x}{y} + 7 + \frac{6y}{x} + \frac{y^2}{x^2} \\ -\frac{6x}{y} + 9 \\ \frac{y}{x} \end{array} \right. \\
 \hline
 \frac{2x}{y} - 6 - \frac{y}{x} \quad \left| \begin{array}{l} -2 + \frac{6y}{x} + \frac{y^2}{x^2} \\ -2 + \frac{6y}{x} + \frac{y^2}{x^2} \end{array} \right.
 \end{array}
 \quad \therefore \text{নির্ণেয় বর্গমূল} = \pm \left( \frac{x}{y} - 3 - \frac{y}{x} \right).$$

[জট্টব্য :  $6\frac{x}{y} = \frac{6x}{y}$  ধরিতে হইবে।  $x$ এর ঘাতের অধঃক্রমে ক্রমে সাজান হইল দেখ। প্রথমে আছে  $x^2$ , দ্বিতীয় পদে  $x$ ; তৃতীয় পদ রাখা হইল 7, কারণ এখানে  $x$  নাই অর্থাৎ  $x$ এর ঘাত 0 ( $7 = 7 \cdot x^0$ )। তারপর চতুর্থ পদ হইল  $\frac{y}{x}$ ; কারণ,  $\frac{y}{x} = yx^{-1}$ ; এইরূপে  $\frac{y^2}{x^2} = y^2 \cdot x^{-2}$ । অতএব পরপর  $x$ এর ঘাতের সূচকগুলি হইবে 2, 1, 0,  $-1$ ,  $-2$ ।]

উদা. 4. Extract the square root of

$$\begin{array}{r}
 9x^{\frac{3}{2}} + 6 + 4x - 12x^{\frac{5}{4}} + x^{-\frac{3}{2}} - 4x^{-\frac{1}{4}} \\
 9x^{\frac{3}{2}} - 12x^{\frac{5}{4}} + 4x + 6 - 4x^{-\frac{1}{4}} + x^{-\frac{3}{2}} \Big| 3x^{\frac{3}{4}} - 2x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{3}{4}} \\
 \underline{9x^{\frac{3}{2}}} \\
 6x^{\frac{3}{4}} - 2x^{\frac{1}{2}} - 12x^{\frac{5}{4}} + 4x + 6 - 4x^{-\frac{1}{4}} + x^{-\frac{3}{2}} \\
 \quad \underline{-12x^{\frac{5}{4}} + 4x} \\
 6x^{\frac{3}{4}} - 4x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{3}{4}} \Big| 6 - 4x^{-\frac{1}{4}} + x^{-\frac{3}{2}} \\
 \quad \underline{6 - 4x^{-\frac{1}{4}} + x^{-\frac{3}{2}}} \\
 \therefore \text{নির্ণেয় বর্গমূল} = \pm \left( 3x^{\frac{3}{4}} - 2x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{3}{4}} \right)
 \end{array}$$

[জটিল্য : এখানে সাজান সহজ।  $x^{\frac{3}{2}}$  এর বর্গমূল  $x^{\frac{3}{2} \times \frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{4}}$ । শেষ ধাপে একে  $6x^{\frac{3}{4}}$  দিয়া ভাগ করিলে হইল  $\frac{6}{6x^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}} = x^{-\frac{3}{4}}$ ।]

উদা. 5. Find the square root of  $x^4 - 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$ .  
[C. U. '51]

$$\begin{array}{r}
 x^4 - 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} \Big( x^2 - x + \frac{1}{4} \\
 \underline{x^4} \\
 2x^2 - x \Big) - 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} \\
 \quad \underline{-2x^3 + x^2} \\
 2x^2 - 2x + \frac{1}{4} \Big) \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} \\
 \quad \underline{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}} \\
 \therefore \text{নির্ণেয় বর্গমূল} = \pm (x^2 - x + \frac{1}{4}).
 \end{array}$$

উদা. 6 Find the square root of

$$4x^4 + 20x^2 - 3 - \frac{70}{x^2} + \frac{49}{x^4}. \quad [\text{C. U. '10, '43}]$$



$$\begin{array}{r}
 4x^4 + 20x^2 - 3 - \frac{70}{x^2} + \frac{49}{x^4} \left( 2x^2 + 5 - \frac{7}{x^2} \right. \\
 \left. 4x^2 \right. \\
 4x^2 + 5 \left. \right) 20x^2 - 3 - \frac{70}{x^2} + \frac{49}{x^4} \\
 20x^2 + 25 \\
 4x^2 + 10 - \frac{7}{x^2} \left. \right) - 28 - \frac{70}{x^2} + \frac{49}{x^4} \\
 - 28 - \frac{70}{x^2} + \frac{49}{x^4}
 \end{array}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় বর্গমূল} = \pm \left( 2x^2 + 5 - \frac{7}{x^2} \right)$$

উদা. 7. Extract the sq. root of  $9a - 12a^{\frac{1}{2}} - 2 + 4a^{-\frac{1}{2}} + a^{-1}$ .  
[Pat. U. '30]

$$\begin{array}{r}
 9a - 12a^{\frac{1}{2}} - 2 + 4a^{-\frac{1}{2}} + a^{-1} \left( 3a^{\frac{1}{2}} - 2 - a^{-\frac{1}{2}} \right. \\
 9a \\
 6a^{\frac{1}{2}} - 2 \left. \right) - 12a^{\frac{1}{2}} - 2 + 4a^{-\frac{1}{2}} + a^{-1} \\
 - 12a^{\frac{1}{2}} + 4 \\
 6a^{\frac{1}{2}} - 4 - a^{-\frac{1}{2}} \left. \right) - 6 + 4a^{-\frac{1}{2}} + a^{-1} \\
 - 6 + 4a^{-\frac{1}{2}} + a^{-1}
 \end{array}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় বর্গমূল} = \pm \left( 3a^{\frac{1}{2}} - 2 - a^{-\frac{1}{2}} \right)$$

[ জটিল্য :  $a$ -এর বর্গমূল  $= a^{\frac{1}{2}}$  ; তৃতীয় ধাপের সময়  $-6 \div 6a^{\frac{1}{2}}$  করিয়া  
পাই  $\frac{-6}{6a^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = -a^{-\frac{1}{2}}$ , অর্থাৎ ভাজ্য  $-6$  এ  $a^0$  আছে, ভাজকে  $a^{\frac{1}{2}}$ কে  
 $a^{-\frac{1}{2}}$  দ্বারা গুণ করিলে  $a^0$  হয়,  $\therefore$  বর্গমূলের তৃতীয় পদে  $-a^{-\frac{1}{2}}$  হইল। ]

উদা. 8. Find the sq. root of  $\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) + 6\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right) + 7$ .  
[C. U. '47]

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = x^4 + \frac{1}{x^4} + 6\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) + 7 = x^4 + \frac{1}{x^4} + 6x^2 - \frac{6}{x^2} + 7.$$

$$x^4 + 6x^2 + 7 \quad \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^4} \left( x^2 + 3 - \frac{1}{x^2} \right)$$

$$\begin{array}{r} \hline 2x^2 + 3 \overline{) 6x^2 + 7 - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^4}} \\ \hline \end{array}$$

$$6x^2 + 9$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 6 - \frac{1}{x^2} \overline{) -2 \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^4}} \\ \hline \end{array}$$

$$-2 - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^4}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় বর্গমূল} = \pm \left( x^2 + 3 - \frac{1}{x^2} \right)$$

[ **উদ্য :** এখানে বন্ধনী তুলিয়া দিয়া সাধারণ নিয়মে করা হইল।  
এইরূপ রাশিকে পূর্ণবর্গরূপে প্রকাশ করিয়া বর্গমূল নির্ণয় করা যায়। পরে  
উদা 10এ এইরূপ প্রশ্নের সমাধান দেখ। ]

**উদা 9** Find the first three terms of the square root of  $a^2 + b^2$ .

$$a^2 + b^2 \left( a + \frac{b^2}{2a} - \frac{b^4}{8a^3}, \dots \right)$$

$$\begin{array}{r} a^2 \\ 2a + \frac{b^2}{2a} \overline{) b^2} \end{array}$$

$$\frac{b^2 + b^4}{4a^2}$$

$$\begin{array}{r} b^2 + b^4 \\ a + \frac{b^2}{2a} + \frac{b^4}{8a^3} \overline{) - \frac{b^4}{4a^2}} \end{array}$$

$$- \frac{b^4}{4a^2} - \frac{b^6}{8a^4} + \frac{b^8}{64a^6}$$

$$\frac{b^8}{8a^4} - \frac{b^8}{64a^6}$$

$$\text{বর্গমূলের নির্ণেয় প্রথম তিনটি পদ} = a + \frac{b^2}{2a} - \frac{b^4}{8a^3}.$$

43. পূর্ণবর্গরূপে প্রকাশ করিয়া বর্গমূল নির্ণয়

উদা. 10. Find the sq. root of  $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x - \frac{1}{x}\right)$ .

[C. U. '14 ; D. B. '38 ; E. B. S. B. '50 ; G. U. '48 ; P. U. '27]

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 4x \cdot \frac{1}{x} - 4\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$[\because (a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab]$$

$$= \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 4 - 2 \cdot 2\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$= \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \cdot 2\left(x - \frac{1}{x}\right) + (2)^2 = \left(x - \frac{1}{x} - 2\right)^2$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় বর্গমূল} = \pm \left(x - 2 - \frac{1}{x}\right).$$

$$\text{অথবা, প্রদত্ত রাশি} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 4x \cdot \frac{1}{x} - 4\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$= a^2 - 4a + 4\left[x - \frac{1}{x} = a \text{ ধরিয়া}\right] = (a-2)^2 = \left(x - \frac{1}{x} - 2\right).$$

[ধরিবার সঙ্কেত : পূর্ণবর্গ করিয়া সাজাইতে হইলে দুইটি পদের পূর্ণবর্গ এবং উহাদের গুণফলের দ্বিগুণ এই তিনটি পদ দেখাইতে হইবে অর্থাৎ  $a^2 \pm 2ab + b^2$  এই আকারে সাজাইতে হয়। প্রদত্ত অঙ্কে  $-4\left(x - \frac{1}{x}\right)$  পূর্ণবর্গ নহে বলিয়া উহাই দুই পদের গুণফলের দ্বিগুণ ;  $\therefore$  একটি পদ  $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2$  হইবে। এইজন্ত অঙ্কের  $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 4x \cdot \frac{1}{x}$  ধরা হইল।

উদা. 11. Extract the sq. root of  $4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 12\left(x - \frac{1}{x}\right) + 1$ .

[B. U.]

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= 4\left\{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2x \cdot \frac{1}{x}\right\} - 12\left(x - \frac{1}{x}\right) + 1 \\ &= 4(a^2 + 2) - 12a + 1 \left[ x - \frac{1}{x} = a \text{ ধরিয়া } \right] \\ &= 4a^2 - 12a + 9 = (2a - 3)^2 = \left(2x - \frac{2}{x} - 3\right)^2 \quad [a \text{ য়ান লিখিয়া}] \\ \therefore \text{নির্ণেয় বর্গমূল} &= \pm \left(2x - 3 - \frac{2}{x}\right)\end{aligned}$$

উদা. 12. Find the sq. root of  $x^4 + \frac{1}{x^4} + 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3$ .  
[C. U. '40]

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2x^2 \cdot \frac{1}{x^2} + 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3 \\ &= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 1 = \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 1\right)^2 \\ \therefore \text{নির্ণেয় বর্গমূল} &= \pm \left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}\right).\end{aligned}$$

উদা. 13. Find the sq. root of  $\left(a + \frac{1}{2a}\right)^2 - 14\left(a - \frac{1}{2a}\right) + 47$ .  
[C. U. '19; W. B. S. F. '58.]

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= \left(a - \frac{1}{2a}\right)^2 + 4a \cdot \frac{1}{2a} - 14\left(a - \frac{1}{2a}\right) + 47 \\ &= \left(a - \frac{1}{2a}\right)^2 + 2 - 14\left(a - \frac{1}{2a}\right) + 47 \\ &= \left(a - \frac{1}{2a}\right)^2 - 2 \cdot 7 \cdot \left(a - \frac{1}{2a}\right) + 49 = \left(a - \frac{1}{2a} - 7\right)^2 \\ \therefore \text{নির্ণেয় বর্গমূল} &= \pm \left(a - 7 - \frac{1}{2a}\right).\end{aligned}$$

উদা. 14. Extract the sq. root of

$$\frac{(a^2 + b^2)^2}{a^4 + b^4 - 2a^2b^2} + 4 \cdot \frac{a}{a+b} \times \frac{b}{a-b} \quad [C. U. ; B. U.]$$



$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= x(x+3)(x+1)(x+2)+1 = (x^2+3x)(x^2+3x+2)+1 \\ &= a(a+2)+1 [x^2+3x=a \text{ ধরিয়া}] = a^2+2a+1 = (a+1)^2 \\ &= (x^2+3x+1)^2. \quad \therefore \text{নির্ণেয় বর্গমূল} = \pm(x^2+3x+1).\end{aligned}$$

উদা. 18. Express  $(x-2a)(x-5a)(x-8a)(x-11a)+81a^4$  as a perfect square. [C. U. '45]

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= (x-2a)(x-11a)(x-5a)(x-8a)+81a^4 \\ &= (x^2-13ax+22a^2)(x^2-13ax+40a^2)+81a^4 \\ &= (k+22a^2)(k+40a^2)+81a^4 [x^2-13ax=k \text{ ধরিয়া}] \\ &= k^2+62ka^2+880a^4+81a^4 = k^2+62ka^2+961a^4 \\ &= (k+31a^2)^2 = (x^2-13ax+31a^2)^2, \text{ ইহা একটি পূর্ণবর্গ।}\end{aligned}$$

উদা. 19. Find the sq. root of  $(ab+ac+bc)^2-4abc(a+c)$ .

মনে কর,  $ab+bc=x$ , এবং  $ac=y$ , সুতরাং  $x=b(a+c)$ .

$$\text{এবং } xy=abc(a+c).$$

$$\text{এক্ষেপে প্রদত্ত রাশি} = (x+y)^2-4xy = (x-y)^2 = (ab+bc-ac)^2.$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় বর্গমূল} = \pm(ab+bc-ac).$$

উদা. 20. Find the sq. root of  $(a-b)^4-2(a^2+b^2)(a-b)^2+2(a^4+b^4)$ . [C. U. '11]

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= \{(a-b)^2\}^2-2(a-b)^2(a^2+b^2)+(a^2+b^2)^2+a^4 \\ &\quad +b^4-2a^2b^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\because 2(a^4+b^4) &= (a^4+b^4)+a^4+b^4 \\ &= (a^2+b^2)^2-2a^2b^2+a^4+b^4]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \{(a-b)^2 - (a^2+b^2)\}^2 + a^4 + b^4 - 2a^2b^2 \\ &= \{a^2+b^2-2ab - a^2-b^2\}^2 + a^4 + b^4 - 2a^2b^2 \\ &= (-2ab)^2 + a^4 + b^4 - 2a^2b^2 = 4a^2b^2 + a^4 + b^4 - 2a^2b^2 \\ &= a^4 + b^4 + 2a^2b^2 = (a^2+b^2)^2.\end{aligned}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় বর্গমূল} = \pm(a^2+b^2).$$

উদা. 21. Extract the sq. root of  $(1-6a^2+a^4)^2 + 16a^2(1-a^2)^2$ . [ C. U. '20 ]

$$\begin{aligned}
 \text{প্রদত্ত রাশি} &= \{(1-2a^2+a^4)-4a^2\}^2 + 16a^2(1-a^2)^2 \\
 &= \{(1-a^2)^2 - 4a^2\}^2 + 16a^2(1-a^2)^2 \\
 &= \{(1-a^2)^2\}^2 + 16a^4 - 8a^2(1-a^2)^2 + 16a^2(1-a^2)^2 \\
 &= \{(1-a^2)^2\}^2 + 16a^4 + 8a^2(1-a^2)^2 \\
 &= \{(1-a^2)^2\}^2 + (4a^2)^2 + 2 \cdot 4a^2(1-a^2)^2 \\
 &= \{(1-a^2)^2 + 4a^2\}^2 \\
 &= (1+a^4-2a^2+4a^2)^2 = (1+2a^2+a^4)^2 \\
 \therefore \text{নির্ণেয় বর্গমূল} &= \pm(1+2a^2+a^4).
 \end{aligned}$$

#### 44. করণীর বর্গমূল নির্ণয়

নিয়ম 1. কোন মূলদ রাশির বর্গমূল একটি মূলদ রাশি ও একটি দ্বিঘাত করণীর সমষ্টি বা অন্তরফলের সমান হইতে পারে না।

প্রমাণ : যদি সম্ভব হয় মনে কর  $\sqrt{x} = a \pm \sqrt{y}$ .

এক্ষেপে উভয়পক্ষের বর্গ করিয়া পাই  $x = a^2 + y \pm 2a\sqrt{y}$

বা,  $\pm 2a\sqrt{y} = x - a^2 - y$ .  $\therefore \pm \sqrt{y} = \frac{x - a^2 - y}{2a}$ , সুতরাং

একটি অমূলদ রাশি ( $\sqrt{y}$ ) একটি মূলদ রাশির সমান হইতেছে, কিন্তু তাহা অসম্ভব।

নিয়ম 2. যদি  $x + \sqrt{y} = a + \sqrt{b}$  হয় এবং উহাতে  $x$  ও  $a$  দুইটিই মূলদ এবং  $\sqrt{y}$  ও  $\sqrt{b}$  দুইটিই প্রকৃত অমূলদ রাশি হয়, তবে  $x = a$  এবং  $y = b$  হইবে।

প্রমাণ : যদি  $x$  ও  $a$  সমান না হয়, তবে মনে কর,  $x = a + m$ ; অতএব প্রদত্ত সত্য হইতে পাই

$$a + m + \sqrt{y} = a + \sqrt{b},$$

$$\therefore \sqrt{b} = m + \sqrt{y}, \text{ কিন্তু ইহা অসম্ভব।}$$

অতএব  $x$  ও  $a$  অসমান নহে;  $\therefore x = a$ .

অতএব  $\sqrt{y} = \sqrt{b}$ ,  $\therefore y = b$ .

[ **জট্টব্য :** (i) পূর্বপৃষ্ঠার নিয়মটিতে যদি  $\sqrt{y}$  ও  $\sqrt{b}$  প্রকৃত অমূলদ না হয়, তবে ঐ নিয়ম সিদ্ধ হইবে না। যথা,  $3 + \sqrt{16} = 4 + \sqrt{9}$  এই সমীকরণের উভয় পক্ষই সমান ( $=7$ ), কিন্তু ইহা হইতে উপরের নিয়মে বলা যায় না যে  $3=4$  এবং  $16=9$ । অতএব, দেখা যাইতেছে যে এই উদাহরণটিতে  $\sqrt{16}$  ও  $\sqrt{9}$  প্রকৃত অমূলদ সংখ্যা না হওয়ায় ঐ নিয়ম সিদ্ধ হইল না।

(ii) (উপরের নিয়মে) যদি  $x + \sqrt{y} = a + \sqrt{b}$  হয়, তবে  $x - \sqrt{y} = a - \sqrt{b}$  হইবে। অতএব  $x \pm \sqrt{y} = m \pm \sqrt{n}$  এই আকারের সমীকরণের উভয় পক্ষের মূলদ রাশিভয় সমান এবং উভয়পক্ষের অমূলদ রাশিভয়ও সমান ধরা যাইবে।

(1) **পর্যবেক্ষণের সাহায্যে বর্গমূল নির্ণয় প্রণালী :** দুই পদযুক্ত দ্বিঘাত করণীয় বর্গমূল নির্ণয়ের জ্ঞাত প্রথমে করণীকে  $a + 2\sqrt{b}$  এই আকারে পরিণত করিবে, তারপর দেখিয়া একপ দুইটি রাশি নির্ণয় করিবে যেন তাহাদের সমষ্টি  $a$ এবং সমান এবং গুণফল  $b$ এর সমান হয়।

**উদা. 22.** Find the square root of  $7 + 2\sqrt{12}$ .

এখানে এমন দুইটি সংখ্যা স্থির কর যাহাদের যোগফল  $=7$  এবং গুণফল  $12$ .  
4 এবং 3 সেই সংখ্যাভয়।

$$\therefore \text{প্রদত্ত রাশি} = 4 + 3 + 2\sqrt{4 \cdot 3} = (2)^2 + (\sqrt{3})^2 + 2 \cdot 2\sqrt{3} \\ = (2 + \sqrt{3})^2. \therefore \text{নির্ণেয় বর্গমূল} = \pm(2 + \sqrt{3}).$$

[ **জট্টব্য :** প্রত্যেক রাশির দুইটি করিয়া বর্গমূল হয়। যথা, 4এর বর্গমূল  $\pm 2$ ,  $a^2 + b^2 + 2ab$ এর বর্গমূল  $\pm(a+b)$ । অতএব, উপরের উদাহরণে  $-2 - \sqrt{3}$  আর একটি বর্গমূল হয়। অতএব, একপ স্থলেও  $\pm(2 + \sqrt{3})$  একপে উক্তর লিখিবে। ]

**উদা. 23.** Extract the sq. root of  $28 - 10\sqrt{3}$ .

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = 28 - 2 \cdot 5\sqrt{3} \\ = 25 + 3 - 2 \cdot 5\sqrt{3} = (5)^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{3} = (5 - \sqrt{3})^2 \\ \therefore \text{নির্ণেয় বর্গমূল} = \pm(5 - \sqrt{3}).$$



উদা. 24. Find the sq. root of  $8+2\sqrt{15}$ .

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= 5+3+2\sqrt{5.3} = (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{5.3} \\ &= (\sqrt{5} + \sqrt{3})^2.\end{aligned}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় বর্গমূল} = \pm(\sqrt{5} + \sqrt{3})$$

উদা. 25. Find the sq. root of  $2 - \sqrt{3}$ .

$$\begin{aligned}2 - \sqrt{3} &= 2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = 2 - 2 \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 3} = 2 - 2\sqrt{\frac{3}{4}} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - 2\sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}} = (\sqrt{\frac{3}{2}})^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2. \therefore \text{নির্ণেয় বর্গমূল} = \pm\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

(2) যদি কোন সমীকরণে উভয় পক্ষেই মূলদ রাশি ও দ্বিঘাতকরণী থাকে, তবে উভয় পক্ষের মূলদ রাশিগুলি সমান এবং উভয় পক্ষের অমূলদ রাশিগুলি সমান হয়। এই নিয়মের সাহায্যে বর্গমূল নির্ণয় করা যায়।

উদা. 26. Find the sq. root of  $8-2\sqrt{15}$ .

$$\text{মনে কর, } \sqrt{8-2\sqrt{15}} = \sqrt{x} - \sqrt{y},$$

$$\text{বর্গ করিয়া পাই, } 8-2\sqrt{15} = x+y-2\sqrt{xy}$$

$$\therefore \text{মূলদ রাশিদ্বয় } x+y=8 \text{ এবং অমূলদ রাশিদ্বয় } -2\sqrt{xy} = -2\sqrt{15}.$$

$$\therefore (x+y)^2 = 64 \text{ এবং } 4xy = 4 \cdot 15 = 60 \text{ [ বর্গ কবিয়া ]}$$

$$\therefore (x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy = 64 - 60 = 4, \therefore x-y = \pm 2.$$

$$\text{এক্ষেপে, } x+y=8$$

$$- \quad x-y = \pm 2$$

$$\therefore x=5 \text{ এবং } y=3, \text{ অথবা } x=3, y=5.$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় বর্গমূল} = \pm(\sqrt{5} - \sqrt{3}).$$

উদা. 27. Find the sq. root of  $a+b+\sqrt{2ab+b^2}$ . [B. U.]

$$\text{মনে কর, } \sqrt{a+b+\sqrt{2ab+b^2}} = \sqrt{x} + \sqrt{y};$$

$$\text{বর্গ করিয়া পাই, } a+b+\sqrt{2ab+b^2} = x+y+2\sqrt{xy}$$

$$\therefore x+y=a+b \cdots (1) \text{ এবং } 2\sqrt{xy}=\sqrt{2ab+b^2}$$

$$\therefore (x+y)^2=(a+b)^2 \text{ এবং } 4xy=2ab+b^2.$$

$$\text{এক্ষণে } (x-y)^2=(x+y)^2-4xy=(a+b)^2-2ab-b^2=a^2,$$

$$\therefore x-y=\pm a \cdots (2). \text{ এক্ষণে, (1) ও (2) সমাধান করিয়া পাই}$$

$$x=a+\frac{b}{2}=\frac{2a+b}{2}, y=\frac{b}{2}, \text{ অথবা } x=\frac{b}{2}, y=\frac{2a+b}{2}.$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় বর্গমূল}=\pm\left(\sqrt{\frac{2a+b}{2}}+\sqrt{\frac{b}{2}}\right)$$

উদা. 28. Find the square root of  $\sqrt{32}-\sqrt{24}$ .

$$\sqrt{32}-\sqrt{24}=\sqrt{8}(\sqrt{4}-\sqrt{3})=\sqrt{8}(2-\sqrt{3})$$

$$=\sqrt{8}\times\frac{4-2\sqrt{3}}{2} \text{ [ } \sqrt{3}\text{র সহগ 2 করা হইল ]}$$

$$=2\sqrt{2}\times\frac{3+1-2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{2}(3+1-2\sqrt{3})$$

$$=\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)^2$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় বর্গমূল}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}-1).$$

#### 45. বর্গমূল সম্বন্ধীয় বিবিধ সমাধান

উদা. 29. What must be added to  $x^4-6x^3+13x^2-12x+1$  to make it a perfect square ? [ C. U. '15 ]

$$\begin{array}{r} x^4-6x^3+13x^2-12x+1 \quad x^2-3x+2 \\ x^4 \\ \hline 2x^2-3x \quad | \quad -6x^3+13x^2-12x+1 \\ \quad \quad | \quad -6x^3+9x^2 \\ \hline 2x^2-6x+2 \quad | \quad 4x^2-12x+1 \\ \quad \quad \quad | \quad 4x^2-12x+4 \\ \quad \quad \quad \hline \quad \quad \quad -3 \end{array}$$

রাশিমালা পূর্ণবর্গ হইলে অবশিষ্ট কিছু থাকিবে না, অর্থাৎ অবশিষ্ট শূন্য হইবে। এখানে অবশিষ্ট আছে  $-3$ , ইহার সহিত  $+3$  যোগ করিলে অবশিষ্ট শূন্য হইবে। সুতরাং রাশিটিতে  $3$  যোগ করিলে উহা পূর্ণবর্গ হইবে।

উদা. 30 What must be subtracted from  $4x^4 - 12x^3 - 7x^2 + 25x + 14$  to make it a perfect square ?

$$\begin{array}{r}
 4x^4 - 12x^3 - 7x^2 + 25x + 14 \quad 2x^2 - 3x - 4 \\
 \underline{4x^4} \phantom{- 12x^3 - 7x^2 + 25x + 14} \\
 4x^2 - 3x \phantom{+ 14} \quad \underline{-12x^3 - 7x^2 + 25x + 14} \\
 \phantom{4x^2 - 3x} 12x^3 + 9x^2 \phantom{+ 25x + 14} \\
 \underline{4x^2 - 6x - 4} \quad \underline{-16x^2 + 25x + 14} \\
 \phantom{4x^2 - 6x - 4} \quad \underline{-16x^2 + 24x + 16} \\
 \phantom{4x^2 - 6x - 4} \phantom{\quad} x - 2
 \end{array}$$

রাশিটি পূর্ণবর্গ হইলে অবশিষ্ট শূন্য হইবে। এক্ষেত্রে অবশিষ্ট আছে  $x - 2$ ,  
 $\therefore$  রাশিটি হইতে  $x - 2$  বিয়োগ করিতে হইবে।

[ জ্ঞেয়্য : (1) কি যোগ করিলে পূর্ণবর্গ হইবে, এরূপ প্রক্ষেপে অবশিষ্ট যাহা থাকিবে তাহাকে বিপরীত sign বিশিষ্ট করিয়া উত্তর হইবে। যথা, যদি  $-a + 2$  অবশিষ্ট থাকে, তবে উত্তর হইবে  $a - 2$ । (2) কত বিয়োগ করিলে পূর্ণবর্গ হইবে প্রশ্ন থাকিলে, অবশিষ্ট যাহা তাহাই উত্তর হয়। ]

উদা. 31. Find for what value of  $n$  will  $16x^4 - 24x^3 + 41x^2 - nx + 16$  be a perfect square. [ C. U. '44 ]

$$\begin{array}{r}
 16x^4 - 24x^3 + 41x^2 - nx + 16 \quad 4x^2 - 3x + 4 \\
 \underline{16x^4} \phantom{- 24x^3 + 41x^2 - nx + 16} \\
 8x^2 - 3x \phantom{+ 16} \quad \underline{-24x^3 + 41x^2 - nx + 16} \\
 \phantom{8x^2 - 3x} \quad \underline{-24x^3 + 9x^2} \\
 8x^2 - 6x + 4 \quad \underline{32x^2 - nx + 16} \\
 \phantom{8x^2 - 6x + 4} \quad \underline{32x^2 - 24x + 16} \\
 \phantom{8x^2 - 6x + 4} \phantom{\quad} 24x - nx
 \end{array}$$

এখানে যদি  $24x - nx = 0$  হয়, তাহা হইলে রাশিটি পূর্ণবর্গ হইবে।

$\therefore 24x - nx = 0, \therefore nx = 24x, \therefore n = 24$  (উত্তর)।

উদা. 32. If  $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+c$  is a perfect square, find  $c$ .

$$\begin{aligned}
 \text{প্রদত্ত রাশি} &= (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) + c \\
 &= (a+4)(a+6) + c \quad [x^2 + 5x = a \text{ ধরিয়া,}] = a^2 + 10a + 24 + c \\
 &= a^2 + 2.5.a + (5)^2 + c - 1 = (a+5)^2 + c - 1.
 \end{aligned}$$

এক্ষেত্রে রাশিটি পূর্ণবর্গ হইবে যদি  $c - 1 = 0$  হয়।  $\therefore$  এখানে  $c = 1$ .



8.  $x^4 - x^3 - \frac{7x^2}{4} + x + 1$ . [ C. U. '13 ]
9.  $x^4 - 6x^3 + 2ax(x-3) + 9x^2 + a^2$ .
10.  $1 + 2a + 2a^2 + a^3 + \frac{a^4}{4}$ . [ C. U. '17 ]
11.  $x^2 - 6x + 5 + \frac{12}{x} + \frac{4}{x^2}$ . [ C. U. '16 ]
12.  $\frac{x^2}{y^2} - \frac{2x}{y} + 3 - \frac{2y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$ . [ C. U. 1909 ]
13.  $4a^4 + 9a^{-4} + 6a^{-2} + 4a^2 + 13$
14.  $x^4 - 2x^3 + \frac{3x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{16}$ . [ C. U. '25, '51 ]
15.  $x^4 - 2x^2 + 3 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}$ . [ C. U. '34 ]
16.  $x^{\frac{4}{3}} - 4x + 1 + 6x^{\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}}$ .
17.  $\frac{x^4}{4} + 4x^2 + \frac{ax^2}{3} + \frac{a^2}{9} - 2x^3 - \frac{4ax}{3}$ . [ C. U. '19, Pat '18 ]
18.  $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 8x + 7 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$ . [ C. U. '32 ]
19.  $x^4 + \frac{1}{x^2} + 2x + 6 + 6x^3 + 9x^2$ . [ C. U. '50 ]
20.  $x^4 + 4x + 2 + \frac{4}{x^2} + \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x^4}$ . [ C. U. '28, '39, '42 ]
21.  $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 7$ . [ D. B. '22, B. U. ]
22.  $4x^3 + 5 + x^{-3} - 4x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{3}{2}}$ .
23.  $x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\left(x - \frac{1}{x}\right) - 1$ .
24.  $\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right) - 2\left(a + \frac{1}{a}\right) + 3$ . [ A. U. ]

H. 25.  $4a^4 + 9\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) + 12a^2\left(a + \frac{1}{a}\right) + 18.$  [Pat. '28]

26.  $4x^4 - 12x^3y + 25x^2y^2 - 24xy^3 + 16y^4.$  [G. U. '50]

27.  $x^4 - 2ax^3 + (a^2 + 2b^2)x^2 - 2ab^2x + b^4.$  [C. U. '48]

(27 ও 28এর অঙ্ক বন্ধনী তুলিয়া কৰ)

✓ 28.  $x^6 + \frac{1}{x^6} - 4x^4 + 4\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) + 2.$  [E.B.S.B. '48 ; B.U.]

✓ 29.  $6x^{\frac{2}{3}} + 9x^2 - 4 - 11x^{\frac{2}{3}} + 4x^{-\frac{2}{3}}.$  [Pat. U. '29]

✓ 30.  $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)+1.$  [G. U. '49]

31.  $(3x^2 - 11x + 6)^2 + 12x(3x - 2)^2$  [M. U. 1905]

[Hints : বাশিটি =  $\{(3x-2)(x-3)\}^2 + 12x(3x-2)^2$

$= (3x-2)^2(x^2 - 6x + 9) + 12x(3x-2)^2$

$= (3x-2)^2(x^2 + 6x + 9) = (3x-2)^2(x+3)^2 \dots\dots]$

32.  $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 4\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 12.$  [C.U. '46 ; W.B.S.F. '52]

33.  $(x-1)(x-4)(x-7)(x-10) + 81.$

34.  $x^4 + y^4 + (x+y)^4.$  [Pat. U. '26]

[Hints : বাশিটি =  $(x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 + \{(x+y)^2\}^2 = (x^2 + y^2)^2$

$- 2x^2y^2 + (x^2 + y^2 + 2xy)^2 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 + (x^2 + y^2)^2$

$+ 4x^2y^2 + 4xy(x^2 + y^2) = 2(x^2 + y^2)^2 + 4xy(x^2 + y^2) + 2x^2y^2$

$= 2\{(x^2 + y^2)^2 + 2xy(x^2 + y^2) + (xy)^2\} = 2(x^2 + y^2 + xy)^2$

$\therefore$  বর্গমূল =  $\pm \sqrt{2(x^2 + y^2 + xy)}$

✓ 35.  $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 - \frac{2x^2}{x^2-1} + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2.$

✓ 36.  $14 - 6\sqrt{5}$  37.  $5 - 2\sqrt{6}$  38.  $4 + \sqrt{A}$

✓ 39.  $33\sqrt{4\sqrt{35}}$  40.  $ax - 2a\sqrt{ax^2 + a^2}$

41.  $\sqrt{48} - \sqrt{45}$  42.  $\sqrt{252} - \sqrt{245}$

43.  $2x + 2\sqrt{x^2 - 9y^2}$  44.  $12x + 2y - 4\sqrt{6xy}$

✓ 45. Prove that  $\sqrt{m} + \sqrt{n}$  cannot be expressed in the form of  $\sqrt{x} + \sqrt{y}$  unless  $m^2 - n$  is a perfect square.

46. Find a value of  $x$  which will make  $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 3x + 31$  a perfect square. [C U. '27, '41]

✓ 47. For what value of  $x$  will  $9x^4 - 12x^3 + 22x^2 - 13x + 12$  be a perfect square?

✓ 48. Find the numerical value of  $c$  which will make  $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - 2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + c$  a perfect square. [C. U. '50]

✓ 49. Find  $m$  so that  $16x^4 - 24x^3 - mx^2 - 24x + 16$  may be a perfect square. [Pat. U. '26]

✓ 50. What must be added to  $4a^4 - 12a^3 - 7a^2 + 23a + 14$  to make the sum a perfect square? [C.U. '21; W.B.S.F. '53]

✓ 51. What must be added to  $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x - 6$  to make it a perfect square?

✓ 52. What must be taken from  $a^4 - 4a^3 + 6a^2 - 5a + 2$  to make the remainder a perfect square?

✓ 53. What must be subtracted from

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+2$  to make it a perfect square?

✓ 54. Find the condition that  $x^2 - px + q$  may be a perfect square.

✓ 55. Find the condition that  $mx^2 + nx + p$  may be a perfect square.

✓ 56. Prove that  $33 \times 34 \times 35 \times 36 + 1$  is a perfect square.

✓ 57. Show that  $249 \times 247 \times 245 \times 243 + 16$  is a perfect square.

✓ 58. Find the first three terms of the square root of  $1 + a^2$ .

✓ 59. For what value of  $a$  will  $x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 8x + a^2$  be a perfect square?

60. Find the square root of

$$\frac{a^4}{b^4} + \frac{b^4}{a^4} - 2\left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3}\right) + 3\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) - 4\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 5.$$

### ঘনমূল নির্ণয় (Extraction of cube root)

46. কোন পদের ঘনমূল নির্ণয়ের প্রক্রিয়া সম্বন্ধে পূর্বে আলোচনা করা হইয়াছে। এক্ষণে কোন রাশির ঘনমূল নির্ণয়ের প্রক্রিয়া দেখান হইতেছে।

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ , এই সূত্র হইতে দেখা যাইতেছে যে  $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$  এর ঘনমূল  $a+b$ . এখন এই ঘনমূলের  $a$  ও  $b$  পদ দুইটি কিরূপে নির্ণয় করা যায় তাহাই স্থির করিতে হইবে।

প্রথমে প্রদত্ত রাশিকে  $a$  বা  $b$  এর অধঃক্রম অনুসারে সাজাইতে হইবে। এখন দেখা যায় যে, রাশিটির প্রথম পদ  $a^3$  এর ঘনমূল  $a$ । ইহাকে ঘনমূলের প্রথম পদ করিয়া বসান হইল এবং রাশিটি হইতে  $a^3$  বিয়োগ করিয়া  $3a^2b + 3ab^2 + b^3$  বা  $(3a^2 + 3ab + b^2) \times b$  অবশিষ্ট পাওয়া গেল। অতএব এই অবশিষ্ট রাশিকে  $3a^2 + 3ab + b^2$  দিয়া ভাগ করিয়াই ঘনমূলের দ্বিতীয় পদ  $b$  কে পাওয়া যায়। এখন দেখ ভাজক  $3a^2 + 3ab + b^2$  এ নিম্নরূপ তিনটি পদ আছে :—

- (1) ঘনমূলের পূর্ব বা প্রথম পদ  $a$  এর বর্গের 3 গুণ অর্থাৎ  $3a^2$  ;
- (2) প্রথম পদ  $a$  এবং নতুন দ্বিতীয় পদ  $b$  এর গুণফলের 3 গুণ অর্থাৎ  $3ab$  ;
- (3) দ্বিতীয় পদ  $b$  এর বর্গ অর্থাৎ  $b^2$ ।

এই প্রক্রিয়াটিকে নিয়ে সাজান হইতেছে :—

$$\begin{array}{r} \text{উদা. 1.} \quad \begin{array}{l} a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3(a+b) \\ a^3 \end{array} \\ \begin{array}{r} 3(a)^2 = 3a^2 \\ 3 \times a \times b = \quad + 3ab \\ (b)^2 = \quad \quad + b^2 \\ \hline 3a^2 + 3ab + b^2 \end{array} \left| \begin{array}{l} 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ \hline 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{array} \right. \\ \therefore \text{নির্ণেয় ঘনমূল} = a + b. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{উদা. 2. Find the cube root of } 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1. \\ \begin{array}{r} 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1(2x - 1) \\ 8x^3 \end{array} \\ \begin{array}{r} 3(2x)^2 = 12x^2 \\ 3 \times 2x \times -1 = \quad - 6x \\ (-1)^2 = \quad \quad + 1 \\ \hline 12x^2 - 6x + 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} -12x^2 + 6x - 1 \\ \hline -12x^2 + 6x - 1 \end{array} \right. \\ \therefore \text{নির্ণেয় ঘনমূল} = 2x - 1. \end{array}$$

[ জ্ঞেব্য : দ্বিতীয় পদটি নির্ণয় করার জন্ত দেখিবে  $12x^2$  কে কি দিয়া গুণ করিলে প্রথম অবশিষ্টের প্রথম পদ  $-12x^2$  হয় ; সুতরাং দ্বিতীয় পদ হইবে  $-1$ । অন্তরূপেও দেখ প্রদত্ত রাশির শেষ পদ  $-1$  এর ঘনমূলই হইবে, ঘনমূলের শেষ বা দ্বিতীয় পদ। ]



উদা. ৩. Find the cube root of  $32 - \frac{16}{3a^3} - 64a^3 + \frac{8}{27a^6}$

এখানে রাশিটি  $a$ -র উৎকর্ষক্রমে সাজাইয়া পাই—

$$\begin{array}{r} \frac{8}{27a^6} - \frac{16}{3a^3} + 32 - 64a^3 \left( \frac{2}{3a^2} - 4a \right. \\ \left. \frac{8}{27a^6} \right. \\ \left. \frac{3\left(\frac{2}{3a^2}\right)^2 = \frac{4}{3a^4}}{3 \times \frac{2}{3a^2} \times (-4a) = -\frac{8}{a}} \right. \\ \left. \frac{(-4a)^2 = 16a^2}{\frac{4}{3a^4} - \frac{8}{a} + 16a^2} \right. \left. \begin{array}{r} - \frac{16}{3a^3} + 32 - 64a^3 \\ - \frac{16}{3a^3} + 32 - 64a^3 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় ঘনমূল} = \frac{2}{3a^2} - 4a.$$

উদা. ৪. Find the cube root of  $79507$ .

এখানে দেখা যাইতেছে যে  $79507$  সংখ্যাটি  $64,000$  এবং  $125,000$  এর অর্থাৎ  $(40)^3$  ও  $(50)^3$  এর মধ্যবর্তী. সুতরাং উহার ঘনমূলটি  $40$  ও  $50$  এর মধ্যবর্তী দুই অবিশিষ্ট সংখ্যা হইবে।

$$\begin{array}{r} 79507 \left( 40 + 3 = 43 \right. \\ 64000 \\ \hline 3(40)^2 = 4800 \quad 15507 \\ 3 \times 40 \times 3 = 360 \\ (3)^2 = 9 \\ \hline 5169 \quad 15507 \end{array}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় ঘনমূল} = 43.$$

[জটিল্য : এখানে সংখ্যাটির এককের অঙ্ক ৭ আছে, আবার ৩ ভিন্ন অঙ্ক কোন সংখ্যার ত্রিঘাতের এককের অঙ্ক ৭ হইতে পারে না।  $\therefore$  ঘনমূলের দ্বিতীয় অঙ্ক ৩ ধরা হইল।]

উদা. 5. Find the cube root of  $8a^6 + 12a^5b + 12a^4b^2 + 35a^3b^3 + 45a^2b^4 + 27ab^5 - 27b^6$ .

$$\frac{8a^6 + 12a^5b + 12a^4b^2 + 35a^3b^3 + 45a^2b^4 + 27ab^5 - 27b^6}{8a^6} (2a^2)^3 = 12a^4$$

$$\frac{3(2a^2)^2 \times ab = 12a^4 + 6a^3b}{(ab)^2 = 12a^4 + 6a^3b + a^2b^2}$$

$$\frac{3(2a^2 + ab)^2 = 12a^4 + 3a^2b^2 + 12a^3b - 18a^2b^2 - 9ab^3}{(-3b^2)^2 = 12a^4 + 12a^3b - 15a^2b^2 - 9ab^3 + 9b^4}$$

$$\frac{12a^5b + 6a^4b^2 + a^3b^3 - 36a^4b^2 - 36a^3b^3 + 45a^2b^4 + 27ab^5 - 27b^6}{12a^5b + 6a^4b^2 + a^3b^3}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় ঘনমূল} = 2a^2 + ab - 3b^2.$$

[প্রস্তাব্য : এখানে ঘনমূলের প্রথম পদ  $2a^2$  পাওয়া গিয়াছে। উহা বর্গের 3 গুণ করিলে  $12a^4$  হয়, উহাকে  $ab$  দিয়া গুণ করিলে প্রথম অবশিষ্টের প্রথম পদ  $12a^5b$  হয়, সুতরাং ঘনমূলের দ্বিতীয় পদ হইল  $+ab$ । এক্ষণে পূর্বের নিয়মে প্রথম ভাজক হইল  $12a^4 + 6a^3b + a^2b^2$ , উহাকে  $ab$  দিয়া গুণ করিয়া গুণকল প্রথম অবশিষ্ট হইতে বিয়োগ করিয়া দ্বিতীয় অবশিষ্ট পাওয়া গেল। পুনরায় ঘনমূলের যে অংশ পাওয়া গিয়াছে তাহা বর্গের 3 গুণ করিয়া হইল  $12a^4 + 3a^2b^2 + 12a^3b$ । এখন ইহার প্রথম পদ  $12a^4$  দিয়া দ্বিতীয় অবশিষ্টের প্রথম পদ  $-36a^4b^2$ কে ভাগ করিলে  $-3b^2$  হয়, সুতরাং উহাই ঘনমূলের তৃতীয় পদ হইবে। তারপর পূর্বের নিয়মে প্রক্রিয়াটি সম্পূর্ণ করা হইল।]

## Exercise 9

Find the cube root of —

$$1. \sqrt[3]{125a^9b^{12}} \quad 2. \sqrt[3]{729x^6y^3} \quad 3. \sqrt[3]{-\frac{216a^{15}}{343b^{16}}}$$

$$4. 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3 \quad 5. a^3 - 3a^2 + 3a - 1$$

$$6. 1 + 3a + 6a^2 + 7a^3 + 6a^4 + 3a^5 + a^6$$

$$7. 8a^3x^3 - 27b^3y^3 - 36a^2x^2by + 54axb^2y^2$$

$$8. 54 - 27x^3 + \frac{8}{x^6} - \frac{36}{x^3}$$

$$9. \frac{a^3}{8} + \frac{3a^2}{4} + \frac{3a}{2} + 1$$

$$10. 614125$$

$$11. 64x^6 - 125y^6 + 300x^2y^4 - 240x^4y^2$$

$$12. 8a^3 + b^3 + c^3 + 12a^2b + 12abc + 6ab^2 + 12a^2c + 6ac^2$$

$$+ 3b^2c + 3bc^2$$

$$13. 8a^6 + 12a^5 - 30a^4 - 35a^3 + 45a^2 + 27a - 27$$

$$14. \frac{1}{8}a^3 - \frac{1}{4}a^2b + \frac{1}{6}ab^2 - \frac{1}{27}b^3 \quad [ \text{M. U. 1861} ]$$

$$15. \frac{a^3}{b^3} - \frac{b^3}{a^3} - 3\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) + 5 \quad [ \text{B. U. 1892} ]$$

$$16. x^3 + \frac{8}{x^3} - 12x^2 - \frac{48}{x^2} + 54x + \frac{108}{x} - 112 \quad [ \text{B. U. 1882} ]$$

For what value of  $x$  will  $8x^3 - 12x^2 + 7x - 3$  be a perfect cube ?

### Quadratic Equation ( দ্বিঘাত সমীকরণ )

47. দ্বিঘাত সমীকরণ। যে সমীকরণের অজ্ঞাত রাশিটি দ্বিঘাত অপেক্ষা উচ্চতর ক্রমের নহে ( অর্থাৎ বাহাতে অজ্ঞাত রাশিটির সর্বোচ্চ ঘাত 2 ) তাহাকে দ্বিঘাত ( quadratic ) সমীকরণ বা দ্বিতীয় মানের ( of the second degree ) সমীকরণ বলে। যথা,  $x^2 = 25$ ,  $3x^2 + 5x = 4$ ,  $ax^2 + bx + c = 0$ , ইত্যাদি।

48. আয়ত্ত এবং মিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণ। (1) যে সমীকরণ অজ্ঞাত রাশিটি কেবলমাত্র দ্বিঘাত-বিশিষ্ট, তাহাকে অমিশ্র দ্বিঘাত ( pure quadratic ) সমীকরণ বলে। যথা,  $x^2 = 4$ ,  $ax^2 - 5 = 0$ ।

(2) যে সমীকরণে অজ্ঞাত রাশিটি প্রথম ও দ্বিতীয় ঘাতের হয়, তাহাকে মিশ্র দ্বিঘাত (adfect quadratic) সমীকরণ বলে। যথা,  $3x^2 - 4x = 15$ । এরূপ সমীকরণের সাধারণ আকার  $ax^2 + bx + c = 0$ , cকে constant (ধ্রুবক) term বা absolute term বলে। এখানে  $b$  ও  $c$ র যে-কোন মান হইতে পারে, এবং  $a$ -র শূন্য ভিন্ন যে-কোন মান হইতে পারে।  $a$ -র মান শূন্য হইলে  $ax^2$  শূন্য হয় বলিয়া সমীকরণটি দ্বিঘাতের থাকে না।

#### 49. অমিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান

প্রথমে অজ্ঞাত রাশিগুলিকে বামপক্ষে এবং জ্ঞাত রাশিগুলিকে ডানপক্ষে লইয়া গিয়া সাধারণভাবে  $x^2$  এর মান নির্ণয় করিয়া তাহার বর্গমূল নির্ণয় করিলে অজ্ঞাত রাশির মান পাওয়া যায়।  $x$  এর মানকে সমীকরণের বীজ (roots) বলে।

#### উদাহরণমালা 11

উদা. 1. Solve  $3x^2 - 36 = 64 - x^2$ .

$$3x^2 - 36 = 64 - x^2,$$

বা,  $3x^2 + x^2 = 64 + 36$  [ পক্ষান্তর করিয়া ], বা,  $4x^2 = 100$ ,

বা,  $x^2 = 25$ ,  $\therefore x = \pm 5$  ( অর্থাৎ  $x = 5$  অথবা  $-5$  ).

[ দ্রষ্টব্য : এখানে  $x^2 = 25$  এর উভয়পক্ষের বর্গমূল লইলে  $\pm x = \pm 5$  হয়, এবং ইহা  $x = \pm 5$  লিখিলেও একই অর্থ বুঝায়। এরূপ সমীকরণের বীজ দুইটি সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইয়া থাকে। ]

উদা. 2 Solve  $2x - \frac{3}{x} = \frac{x}{2}$ .

উভয়পক্ষে  $2x$  দ্বারা গুণ করিয়া পাই

$$4x^2 - 6 = x^2, \text{ বা, } 3x^2 = 6, \text{ বা, } x^2 = 2, \therefore x = \pm \sqrt{2}.$$

[অন্য প্রণালী]  $\frac{2x^2 - 3}{x} = \frac{x}{2}$ ,

বা,  $4x^2 - 6 = x^2$ . [ বস্তুগুণন দ্বারা ] [ এর পর পূর্বের মত হইবে ]

উদা. 3. Solve  $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+5} = \frac{1}{2}$ . [ C. U. '19 ]

$$\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+5} = \frac{1}{2}, \text{ বা, } \frac{x+5+2x+2}{(x+1)(x+5)} = \frac{1}{2},$$

$$\text{বা, } \frac{3x+7}{x^2+6x+5} = \frac{1}{2}, \text{ বা, } x^2+6x+5=6x+14,$$

$$\text{বা, } x^2=14-5=9, \therefore x=\pm 3.$$

$$\text{উদা. 4. } \frac{3x+4}{x+2} = \frac{x+5}{x+1}.$$

$$\text{বিক্রমণের দ্বারা পাঠ, } 3x^2+7x+4=x^2+7x+10,$$

$$\text{বা, } 2x^2=6, \text{ বা, } x^2=3, \therefore x=\pm \sqrt{3}.$$

$$\text{উদা. 5. Solve } \frac{x+4}{x-4} + \frac{x-4}{x+4} = \frac{10}{3} \quad [\text{C. U. '12, D. B. '22}]$$

$$\text{বা, } \frac{(x+4)^2+(x-4)^2}{(x-4)(x+4)} = \frac{10}{3}, \text{ বা, } \frac{2x^2+32}{x^2-16} = \frac{10}{3},$$

$$\text{বা, } 10x^2-160=6x^2+96, \text{ বা, } 4x^2=256, \text{ বা, } x^2=64 \therefore x=\pm 8.$$

### 50. ত্রিঘাত দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান

#### (1) উৎপাদক নির্ণয় দ্বারা সমাধান

$$\text{উদা. 6. Solve } 4x^2+25x-351=0. \quad [\text{D. B. '27}]$$

$$4x^2+25x-351=0,$$

$$\text{বা, } 4x^2+52x-27x-351=0,$$

$$\text{বা, } 4x(x+13)-27(x+13)=0, \text{ বা, } (x+13)(4x-27)=0,$$

এখানে  $\therefore$  দুইটি উৎপাদকের গুণফল শূন্য,  $\therefore$  উহাদের একটি অবশ্যই শূন্য হইবে। যদি  $x+13=0$  হয়, তবে  $x=-13$ ; আর যদি  $4x-27=0$  হয়, তবে  $4x=27$ .  $\therefore x=\frac{27}{4}=6\frac{3}{4}$ .  $\therefore x=-13$  অথবা  $6\frac{3}{4}$ .

$$\text{উদা. 7. Solve } (x-7)(x-19)=64. \quad [\text{C. U. '18}]$$

$$(\text{বন্ধনী ভুলিয়া}) x^2-26x+133=64, \text{ বা, } x^2-26x+69=0,$$

$$\text{বা, } x^2-23x-3x+69=0, \text{ বা, } x(x^2-23)-3(x-23)=0,$$

$$\text{বা, } (x-23)(x-3)=0,$$

$$\therefore \text{ হয় } x-23=0 \text{ অথবা } x-3=0, \therefore x=23 \text{ বা } 3.$$

উদা. 8. Solve  $\frac{x-2}{x+2} + \frac{6(x-2)}{(x-6)} = 1$ . [C. U. '51]

এখানে,  $\frac{6(x-2)}{x-6} = 1 - \frac{x-2}{x+2}$ , বা,  $\frac{6(x-2)}{x-6} = \frac{x+2-x-2}{x+2}$

বা,  $\frac{6(x-2)}{x-6} = \frac{4}{x+2}$ , বা,  $\frac{3(x-2)}{x-6} = \frac{2}{x+2}$ ,

বা,  $3(x^2-4) = 2(x-6)$ , বা,  $3x^2-12=2x-12$ ,

বা,  $3x^2-2x-12+12=0$ , বা,  $3x^2-2x=0$ , বা,  $x(3x-2)=0$ ,

$\therefore$  হয়  $x=0$  অথবা  $3x-2=0$ . অতএব,  $x=0$  বা  $\frac{2}{3}$ .

উদা. 9. Solve  $x + \frac{1}{x} = 25\frac{1}{25}$ . [C.U. 14, '39 Sup. ; D. B. '25]

$x + \frac{1}{x} = 25\frac{1}{25}$ , বা,  $\frac{x^2+1}{x} = \frac{626}{25}$ , বা,  $25x^2+25=626x$ ,

বা,  $25x^2-626x+25=0$ , বা,  $25x^2-625x-x+25=0$ ,

বা,  $25x(x-25)-1(x-25)=0$ , বা,  $(x-25)(25x-1)=0$ ,

$\therefore$  হয়  $x-25=0$ , অথবা  $25x-1=0$ ,  $\therefore x=25$  বা  $\frac{1}{25}$ .

\*উদা. 10. Solve  $(x-3)(x-4) = \frac{34}{33^2}$ .

মনে কর  $a=33$ ; এক্ষেপে  $(x-3)(x-4) = \frac{34}{a^2}$ ,

বা,  $a^2(x-3)(x-4) = 34$ , বা,  $a^2(x-3)(x-4) = 33+1$

বা,  $a(x-3).a(x-4) = a+1$

বা,  $(ax-3a)(ax-4a) - a - 1 = 0$

বা,  $(ax-3a)(ax-4a) + (ax-4a) - (ax-3a) - 1 = 0$

[  $\because (ax-4a) - (ax-3a) = -a$  হয় ]

বা,  $(ax-4a)(ax-3a+1) - 1(ax-3a+1) = 0$ ,

বা,  $(ax-3a+1)(ax-4a-1) = 0$ ,  $\therefore$  হয়  $ax-3a+1=0$

অথবা  $ax-4a-1=0$ ;  $\therefore$  হয়  $x = \frac{3a-1}{a} = 3 - \frac{1}{a} = 3 - \frac{1}{33} = 2\frac{32}{33}$ ;

অথবা,  $x = \frac{4a+1}{a} = 4 + \frac{1}{a} = 4 + \frac{1}{33} = 4\frac{1}{33}$ .

$\therefore x = 2\frac{32}{33}$  বা  $4\frac{1}{33}$ .

উদা. 11. Solve  $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+b}$ . [C. U. '21]

এক্ষেত্রে,  $\frac{x+b-x}{x(x+b)} = \frac{a+b-a}{a(a+b)}$ , বা,  $\frac{b}{x^2+bx} = \frac{b}{a^2+ab}$ ,

বা,  $x^2+bx = a^2+ab$ , বা,  $x^2+bx-a^2-ab=0$ ,

বা,  $(x+a)(x-a)+b(x-a)=0$ , বা,  $(x-a)(x+a+b)=0$ ,

$\therefore x=a$  বা  $-(a+b)$ .

উদা. 12. Solve  $x = \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2-x}}}$ . [C. U. '30]

এখানে,  $x = \frac{1}{2 - \frac{1}{\frac{4-2x-1}{2-x}}}$ , বা,  $x = \frac{1}{2 - \frac{1}{3-2x}}$ , বা,  $x = \frac{1}{2 - \frac{2-x}{3-2x}}$

বা,  $x = \frac{1}{\frac{6-4x-2+x}{3-2x}}$ , বা,  $x = \frac{1}{4-3x}$ , বা,  $x = \frac{3-2x}{4-3x}$ ,

বা,  $4x-3x^2=3-2x$ , বা,  $-3x^2+6x-3=0$ ,

বা,  $x^2-2x+1=0$  [  $-3$  দ্বারা ভাগ করিয়া ]

বা,  $(x-1)^2=0 \therefore x=1, 1$ .

[ দ্রষ্টব্য :  $(x-1)^2=0$  অর্থাৎ  $(x-1)(x-1)=0 \therefore x$ -এর মান 1,1 হইবে ]

উদা. 13. Solve  $\frac{(x+1)^3-(x-1)^3}{(x+1)^2-(x-1)^2} = 2$ . [D. B. '49]

বা,  $\frac{\{(x+1)-(x-1)\}\{(x+1)^2+(x+1)(x-1)+(x-1)^2\}}{\{(x+1)+(x-1)\}\{(x+1)-(x-1)\}} = 2$

[  $a^3-b^3$  ও  $a^2-b^2$  এর formula হইতে ]

$$\text{বা, } \frac{(x+1)^2 + (x+1)(x-1) + (x-1)^2}{(x+1) + (x-1)} = 2,$$

$$\text{বা, } \frac{x^2 + 2x + 1 + x^2 - 1 + x^2 - 2x + 1}{2x} = 2, \text{ বা } \frac{3x^2 + 1}{2x} = 2$$

$$\text{বা, } 3x^2 + 1 = 4x, \text{ বা } 3x^2 - 4x + 1 = 0, \text{ বা } 3x^2 - 3x - x + 1 = 0,$$

$$\text{বা, } (x-1)(3x-1) = 0, \therefore x = 1 \text{ বা } \frac{1}{3}.$$

$$\text{উদা. 14. Solve } \frac{1}{a+b+x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x} \quad [\text{D. B. '40, '43, '48}]$$

$$\text{বা, } \frac{1}{a+b+x} = \frac{bx+ax+ab}{abx}, \text{ বা } (a+b+x)(bx+ax+ab) = abx,$$

$$\text{বা, } (a+b+x)(bx+ax+ab) - abx = 0,$$

$$\text{বা, } (a+b)(a+x)(b+x) = 0, \text{ বা, } (a+x)(b+x) = 0,$$

$$\therefore x = -a \text{ বা } -b.$$

## (2) পূর্ণবর্গে পরিণত করিয়া সমাধান

প্রথমে সমীকরণটিকে সাধারণ আকারে পরিণত করিয়া  $x$ -বিহীন পদগুলিকে ডানদিকে পক্ষান্তর কর। উহার উভয় পক্ষকে  $x^2$  এর সহগ দ্বারা ভাগ কর। এখন  $x$  এর সহগের অর্ধেকের বর্গ উভয় পক্ষে যোগ কর। ইহাতে বামপক্ষটি পূর্ণবর্গ হইয়া যাইবে।

$$\text{উদা. 15. Solve } x^2 - 26x = 407. \quad [\text{D. B. '29}]$$

$$x^2 - 26x = 407, \text{ বা, } x^2 - 26x + (13)^2 = 407 + (13)^2,$$

$$\text{বা, } (x-13)^2 = 407 + 169 = 576, \quad \text{বা, } (x-13) = \pm \sqrt{576},$$

$$\text{বা, } x-13 = \pm 24, \therefore x = 13 \pm 24 = 37 \text{ বা } -11.$$

[দ্রষ্টব্য : এইখানে  $x$  এর সহগ 26, উহার অর্ধেক 13,  $\therefore (13)^2$  উভয়দিকে যোগ করা হইল।  $x$  এর মান একটি হইল  $(13+24)$ , অন্যটি  $(13-24)$ ]

$$\text{উদা. 16. Solve } 10x^2 - 69x + 45 = 0. \quad [\text{D. B. '30}]$$

$$10x^2 - 69x + 45 = 0, \text{ বা, } x^2 - \frac{69}{10}x + \frac{45}{10} = 0$$



$$\text{বা, } x^2 - \frac{69}{10}x = -\frac{9}{2}, \text{ বা, } x^2 - \frac{69}{10}x + \left(\frac{69}{20}\right)^2 = \left(\frac{69}{20}\right)^2 - \frac{9}{2},$$

$$\text{বা, } \left(x - \frac{69}{20}\right)^2 = \frac{4761}{400} - \frac{9}{2} = \frac{2961}{400}, \text{ বা, } x - \frac{69}{20} = \pm \sqrt{\frac{2961}{400}},$$

$$\therefore x = \frac{69}{20} \pm \frac{\sqrt{2961}}{20} = \frac{69 \pm \sqrt{2961}}{20}.$$

[ **জটিল্য :** এখানে প্রথমে  $x^2$  এর সহগ 10 দ্বারা ভাগ করা হইল। তারপর  $x$  এর সহগ  $\frac{69}{10}$  এর অর্ধেক  $\frac{69}{20}$  এর বর্গ উভয় দিকে যোগ করা হইল। 2961 পূর্ণবর্গ সংখ্যা নহে,

$$\text{সেজন্য } \sqrt{\frac{2961}{400}} = \frac{\sqrt{2961}}{\sqrt{400}} = \pm \frac{\sqrt{2961}}{20} \text{ হইল। } ]$$

উদা. (17.) Solve  $ax^2 + bx + c = 0$ . [C. U. '46]

উভয়পক্ষে  $a$  দ্বারা ভাগ করিয়া পাই  $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ ,

$$\text{বা, } x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}, \text{ বা, } x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

[ উভয়পক্ষে  $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$  যোগ করিয়া ]

$$\text{বা, } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}, \text{ বা, } x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\therefore x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

[ **বিশেষ জটিল্য :** সকল দ্বিঘাত সমীকরণকে,  $ax^2 + bx + c = 0$  এই সাধারণ আকারে পরিণত করা যায়। তারপর  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  এই

সূত্রের সাহায্যে তাহার সমাধান করা যায়। এই সূত্রটি ভালভাবে বুঝিয়া জুখা করিবে। **ইহার ব্যাখ্যা :** সমীকরণে আছে  $x^2$  এর সহগ  $a$ , এবং  $x$  এর সহগ  $b$  এবং  $x$ -বিহীন পদ  $c$ . সূত্রের লব বিপরীত sign-যুক্ত  $x$  এর সহগ, তারপর  $\pm \sqrt{\quad}$  চিহ্নের মধ্যে হইবে  $x$  এর সহগের বর্গ

(অর্থাৎ  $b^2$ ) বিযুক্ত  $x^2$  এর সহগ ও  $x$ -বিহীন পদের গুণফলের 4 গুণ অর্থাৎ  $-4ac$ . আর হবে হইবে  $x^2$  এর সহগের বিগুণ। এখানে  $x$  এর value দুইটি কি কি হইল দেখ। একটি হইল  $-b + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ , অতটি হইল  $-b - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  ]

17. (a) Apply the above formula to find the roots of the equation  $x^2 - 2\sqrt{3}x - 13 = 0$ . [C. U. '46]

(3) সূত্রের সাহায্যে সমাধান

উদা. 18. Solve  $x^2 - 2\sqrt{17}x - 8 = 0$ . [C U '47]

এখানে,  $x = \frac{2\sqrt{17} \pm \sqrt{(2\sqrt{17})^2 - 4 \times 1 \times -8}}{2 \times 1}$

$$= \frac{2\sqrt{17} \pm \sqrt{68 + 32}}{2} = \frac{2\sqrt{17} \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{2\sqrt{17} \pm 10}{2} = \sqrt{17} \pm 5.$$

উদা. 19. Solve  $\frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{1}{(x-2)(x-3)} + \frac{1}{(x-3)(x-4)} = \frac{1}{6}$ . [C. U. '37]

$$\text{বা, } \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-3} = \frac{1}{6},$$

$$\text{বা, } \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{6}, \text{ বা, } \frac{x-1-x^2+4}{(x-4)(x-1)} = \frac{1}{6},$$

$$\text{বা, } \frac{3}{x^2-5x+4} = \frac{1}{6}, \text{ বা, } x^2-5x+4=18, \text{ বা } x^2-5x-14=0,$$

$$\text{বা, } (x-7)(x+2)=0, \therefore x=7, -2.$$

[জটিল্য:  $\frac{1}{(x-1)(x-2)}$  কে  $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$  এইরূপ আকারে লেখা

যায়, কারণ  $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$  কষিয়া ঐ  $\frac{1}{(x-1)(x-2)}$  হয়। এইভাবে বাকী পদ দুইটিও লেখা হইল।]

উদা. 20. Find the roots of the quadratic equation  $ax^2+2bx+c=0$ . [C. U. '45 ; G. U. '49]

[এখানে  $x$ এর value দুইটি জানিতে চাহিতেছে অর্থাৎ সমীকরণটি সমাধান করিতে হইবে।]

$$ax^2+2bx+c=0, \text{ বা, } ax^2+2bx=-c,$$

$$\text{বা, } x^2+\frac{2b}{a}x=-\frac{c}{a}, \text{ বা, } x^2+\frac{2b}{a}x+\left(\frac{b}{a}\right)^2=\frac{b^2}{a^2}-\frac{c}{a},$$

$$\text{বা, } \left(x+\frac{b}{a}\right)^2=\frac{b^2-ac}{a^2}, \text{ বা, } x+\frac{b}{a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-ac}}{a},$$

$$\therefore x=-\frac{b}{a}\pm\frac{\sqrt{b^2-ac}}{a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}.$$

$$\begin{aligned} \text{[মূল সাহায্যে]} \quad x &= \frac{-2b \pm \sqrt{(2b)^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-2b \pm 2\sqrt{b^2 - ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}. \end{aligned}$$

উদা. 21. Solve  $\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+2a} + \frac{1}{x+3a} = \frac{3}{x}$ . [C. U. '50]

$$\text{এখানে সমীকরণটি হইতে, } \frac{1}{x+a} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2a} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+3a} - \frac{1}{x} = 0,$$

$$\text{বা, } \frac{x-x-a}{x(x+a)} + \frac{x-x-2a}{x(x+2a)} + \frac{x-x-3a}{x(x+3a)} = 0,$$

$$\text{বা, } \frac{-a}{x(x+a)} + \frac{-2a}{x(x+2a)} + \frac{-3a}{x(x+3a)} = 0,$$

$$\text{বা, } \frac{1}{x+a} + \frac{2}{x+2a} + \frac{3}{x+3a} = 0, \text{ বা, } \frac{1}{x+a} + \frac{3}{x+3a} = \frac{-2}{x+2a},$$

$$\text{বা, } \frac{x+3a+3x+3a}{(x+a)(x+3a)} = \frac{-2}{x+2a}, \text{ বা, } \frac{4x+6a}{x^2+4ax+3a^2} = \frac{-2}{x+2a},$$

$$\text{বা, } \frac{2x+3a}{x^2+4ax+3a^2} = \frac{-1}{x+2a},$$

বা,  $2x^2 + 7ax + 6a^2 = -x^2 - 4ax - 3a^2$ ,

বা,  $3x^2 + 11ax + 9a^2 = 0$ ,

$$\therefore x = \frac{-11a \pm \sqrt{(11a)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 9a^2}}{6} = \frac{-11a \pm \sqrt{13a^2}}{6}$$

$$= \frac{-11a \pm a\sqrt{13}}{6} = \frac{-11 \pm \sqrt{13}}{6} \cdot a.$$

উদা. 22. Solve  $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$ .

[C. U. '26, '29 ; D. B. '50]

উভয়পক্ষে  $(x-a)(x-b)(x-c)$  দ্বারা গুণ করিয়া পাই

$(x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) + (x-a)(x-b) = 0$ ,

বা,  $x^2 - (b+c)x + bc + x^2 - (c+a)x + ac + x^2 - (a+b)x + ab = 0$ ,

বা,  $3x^2 - (b+c+c+a+a+b)x + ab + bc + ca = 0$ ,

বা,  $3x^2 - 2(a+b+c)x + (ab+bc+ca) = 0$ ,

$$\therefore x = \frac{2(a+b+c) \pm \sqrt{4(a+b+c)^2 - 4 \cdot 3(ab+bc+ca)}}{6}$$

$$= \frac{2(a+b+c) \pm 2\sqrt{(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca)}}{6}$$

$$= \frac{(a+b+c) \pm \sqrt{a^2+b^2+c^2 - ab - bc - ca}}{3}$$

উদা. 23. Solve, without assuming any formula, the equation  $x^2 - 11x = 82052$ . [C. U. '42]

$x^2 - 11x = 82052$ , বা,  $x^2 - 11x + (\frac{11}{2})^2 = 82052 + (\frac{11}{2})^2$ ,

বা,  $(x - \frac{11}{2})^2 = 82052 + \frac{121}{4} = \frac{3283322}{4}$ ,

বা,  $x - \frac{11}{2} = \pm \frac{\sqrt{3283322}}{2}$  (উভয় পক্ষের বর্গমূল লইয়া)

$\therefore x = \frac{11}{2} \pm \frac{\sqrt{3283322}}{2} = 292$ , বা  $-281$ .

## (4) ত্রীধর আচার্যের প্রণালী বা হিন্দুপ্রণালী

প্রদত্ত সমীকরণকে প্রথমে  $ax+bx+c=0$  এই সাধারণ আকারে পরিণত করিবে। যথা,  $(x-2)^2=3x+5$  সমীকরণকে  $x^2-4x+4=3x+5$ , বা  $x^2-7x-1=0$  এইভাবে লিখিবে।  $x$ -বিহীন পদ  $c$ -কে ডানদিকে লইয়া যাও। উভয় পক্ষকে  $x^2$ এর সহগের 4 গুণ (এখানে  $4a$ ) দ্বারা গুণ কর। তাবপর উভয়পক্ষে  $x$ এর সহগের বর্গ (এখানে  $b^2$ ) যোগ কর। ইহাতে বামদিকে একটি পূর্ণবর্গ রাশি হইবে।

উদা. 24. Solve  $3x^2-11x+9=0$ . [C. U. '35]

এখানে  $3x^2-11x=-9$ ,

বা,  $36x^2-132x=-108$  [ উভয় পক্ষকে  $4 \times 3$  দ্বারা গুণ করিয়া ]

বা,  $36x^2-132x+(11)^2=121-108$  [ উভয় পক্ষে  $x$ এর সহগের বর্গ বা  $(-11)^2$  যোগ করিয়া ]

বা,  $(6x-11)^2=13$ , বা,  $6x-11=\pm\sqrt{13}$ ,

বা,  $6x=11\pm\sqrt{13}$ ,  $\therefore x=\frac{11\pm\sqrt{13}}{6}$ .

উদা. 25. Solve  $x^2-2\sqrt{7}x-2=0$ . [G. U. '48]

এখানে  $x^2-2\sqrt{7}x=2$ , বা,  $4x^2-8\sqrt{7}x=8$

[ উভয় পক্ষকে  $4 \times 1$  দ্বারা গুণ করিয়া ]

বা,  $4x^2-8\sqrt{7}x+(2\sqrt{7})^2=(2\sqrt{7})^2+8$

[ উভয় পক্ষে  $(2\sqrt{7})^2$  যোগ করিয়া ]

বা,  $(2x-2\sqrt{7})^2=28+8=36$ ,

বা,  $2x-2\sqrt{7}=\pm 6$ , বা,  $2x=2\sqrt{7}\pm 6$ ;  $\therefore x=\sqrt{7}\pm 3$ .

## 51. সূচকীয় সমীকরণ

উদা. 26. Solve  $4 \times 2^{x-1}=8^x$ . [D. B. '31]

$4 \times 2^{x-1}=8^x$ , বা,  $2^2 \times 2^{x-1}=(2^3)^x$ ,

বা,  $2^{x-1+2}=2^{3x}$ , বা,  $2^{x+1}=2^{3x}$

$\therefore 3x=x+1$ , বা,  $2x=1$ ,  $\therefore x=\frac{1}{2}$ .

[ উদ্য : এখানে 4 ও 8কে 2-এর ঘাতে প্রকাশ করিয়া  $4=2^2$ ,  $8=2^3$  লেখা হইল। এইরূপ করিতে হয়। তারপর দেখ,  $2^{x+1}$  এবং  $2^{3x}$  সমান হওয়ায় 2-এর ঘাত দুইটি অবশ্যই সমান।  $\therefore 3x=x+1$  লেখা হইল। ]

উদ্য. 27. Solve  $2^{x+1} = \sqrt[3]{64}$ .

$$2^{x+1} = \sqrt[3]{64}, \text{ বা, } 2^{x+1} = 64^{\frac{1}{3}}$$

বা,  $2^{x+1} = (2^6)^{\frac{1}{3}}$  [ এখানে 64কে 2-এর ঘাতে প্রকাশ করা হইল ]

$$\text{বা, } 2^{x+1} = 2^2 \quad \therefore x+1 = 2,$$

$$\text{বা, } x^2 + x = 6, \quad \text{বা, } x^2 + x - 6 = 0,$$

$$\text{বা, } (x+3)(x-2) = 0, \quad \therefore x = 2, \text{ বা, } -3.$$

উদ্য. 28. Solve  $(\sqrt{3})^{2x+4} = 243$ . [C.U. '32, '50 ; G.U. '51]

$$(\sqrt{3})^{2x+4} = 243, \text{ বা, } (3^{\frac{1}{2}})^{2x+4} = (3)^5 \quad [ \because 243 = 3^5 ]$$

$$\text{বা, } 3^{x+2} = 3^5, \quad \therefore x+2 = 5, \quad \therefore x = 3.$$

উদ্য. 29. Solve  $9^x = \frac{9}{3^x}$ .

[ P. U. '30 ]

$$9^x = \frac{9}{3^x} \text{ বা, } (3^2)^x = \frac{9}{3^x} \text{ বা, } 3^{2x} = \frac{9}{3^x} \text{ বা, } 3^{2x} \cdot 3^x = 9,$$

$$\text{বা, } 3^{3x} = 3^2, \quad \therefore 3x = 2, \quad \therefore x = \frac{2}{3}.$$

উদ্য. 30. Solve  $4^{x^2+x+2} \times 5^{x^2+x+3} = 800000$ .

$$4^{x^2+x+2} \times 5^{x^2+x+3} = 800000,$$

$$\text{বা, } 4^{x^2+x+2} \times 5^{x^2+x+2} \times 5 = 800000,$$

$$\text{বা, } 4^{x^2+x+2} \times 5^{x^2+x+2} = 160000$$

[ উভয় পক্ষকে 5 দ্বারা ভাগ করিয়া ]

$$\text{বা, } (20)^{x^2+x+2} = (20)^4, \quad \therefore x^2+x+2 = 4,$$

বা,  $x^2 + x - 2 = 0$ , বা,  $(x-1)(x+2) = 0$ ,

$\therefore x = 1$  বা  $-2$ .

উদা 31. Solve  $4.3^{x+1} = 27 + 9^x$ . [C. U. '51]

$4.3^{x+1} = 27 + 9^x$ , বা,  $4.3^x.3 = 27 + 3^{2x}$ ,

বা,  $12.3^x = 27 + (3^x)^2$ , বা,  $12p = 27 + p^2$  [ $3^x = p$  ধরিয়া]

বা,  $p^2 - 12p + 27 = 0$ , বা,  $(p-9)(p-3) = 0$ ,  $\therefore p = 9$  বা  $3$ .

$\therefore 3^x = 9 = 3^2$  অথবা  $3^x = 3^1$ ,  $\therefore x = 2$  বা  $1$ .

উদা 32. Solve  $2^{x+4} + 2^{x+1} = 144$ .

$2^{x+4} + 2^{x+1} = 144$ , বা,  $2^x.2^4 + 2^x.2 = 144$ ,

বা,  $16.2^x + 2.2^x = 144$ , বা,  $18.2^x = 144$ , বা,  $2^x = 8 = 2^3$ ,  $\therefore x = 3$ .

উদা 33. Solve  $a^{2x-3} = b^{2x-3}$ .

$a^{2x-3} = b^{2x-3}$ ,  $\therefore \frac{a^{2x-3}}{b^{2x-3}} = 1$ , বা,  $\left(\frac{a}{b}\right)^{2x-3} = 1 = \left(\frac{a}{b}\right)^0$

$\therefore 2x-3=0$ ,  $\therefore x = \frac{3}{2}$  [ $\because \left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$ ]

উদা 34. Solve  $\begin{cases} 3^x.9^y = 27^z & (1) \\ 4^x.8^y = 32^z & (2) \\ 2^x.5^y.7^z = 70 & (3) \end{cases}$  [C. U. '43]

(1) হইতে পাই  $3^x.3^{2y} = 3^{3z}$ , বা,  $3^{x+2y} = 3^{3z}$ ,

$\therefore x+2y=3z$ , বা,  $x+2y-3z=0 \dots (4)$

(2) ,, ,,  $2^{2x}2^{3y} = 2^{5z}$ , বা,  $2^{2x+3y} = 2^{5z}$ ,

$\therefore 2x+3y=5z$ , বা,  $2x+3y-5z=0 \dots (5)$

এক্ষে (4) ও (5) হইতে বজ্রগুণন প্রণালীতে পাই,

$-\frac{x}{10} + \frac{y}{9} = -\frac{z}{6} + \frac{z}{5} = \frac{z}{3} - \frac{z}{4}$ , বা,  $-\frac{x}{10} = -\frac{y}{9} = -\frac{z}{1}$ ,

বা,  $x=y=z=k$  (মনে কর)।

এক্ষে (3) হইতে পাই  $2^k.5^k.7^k = 70$ , বা,  $(2.5.7)^k = 70$ ,

বা,  $70^k = 70^1$ ,  $\therefore k = 1$ .

অতএব,  $x=y=z=1$ .

উদা. 35. Solve  $x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} - 2 = 0$ . [ C. U. '30 ]

$$x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} - 2 = 0, \text{ বা, } \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 + x^{\frac{1}{3}} - 2 = 0,$$

$$\text{বা, } a^2 + a - 2 = 0 \left[ x^{\frac{1}{3}} = a \text{ ধরিয়া} \right]$$

$$\text{বা, } (a-1)(a+2) = 0, \therefore a = 1 \text{ বা } -2. \therefore x^{\frac{1}{3}} = 1 \text{ বা } -2.$$

$$\therefore \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = (1)^3 \text{ বা } (-2)^3, \therefore x = 1 \text{ বা } -8.$$

উদা. 36. Solve  $5^x + 5^{-x} = 25\frac{1}{5}$ .

$$\text{এখানে } 5^x + \frac{1}{5^x} = 25 + \frac{1}{25}, \text{ বা, } 5^x + \frac{1}{5^x} = 5^2 + \frac{1}{5^2},$$

$$\text{বা, } 5^x - 5^2 - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^x} = 0,$$

$$\text{বা, } (5^x - 5^2) - \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{5^x}\right) = 0, \text{ বা, } (5^x - 5^2) - \left(\frac{5^x - 5^2}{5^2 \cdot 5^x}\right) = 0,$$

$$\text{বা, } (5^x - 5^2) \left(1 - \frac{1}{5^2 \cdot 5^x}\right) = 0,$$

$$\therefore 5^x - 5^2 = 0 \dots (1), \text{ বা, } 1 - \frac{1}{5^2 \cdot 5^x} = 0 \dots (2)$$

$$\text{এক্ষে (1) হইতে পাই } 5^x = 5^2, \therefore x = 2;$$

$$\text{এবং (2) ,, ,, } \frac{1}{5^2 \cdot 5^x} = 1, \text{ বা, } \frac{1}{5^x} = 5^2 = \frac{1}{5^{-2}} \therefore x = -2.$$

$$\therefore x = 2 \text{ বা } -2.$$

উদা. 37. Solve  $a^{2x} \cdot a^{y+1} = a^8, a^{3y} \cdot a^{3x+5} = a^{20}$ .

$$\therefore a^{2x} a^{y+1} = a^8, \therefore a^{2x+y+1} = a^8, \\ \therefore 2x+y+1=8, \text{ বা } 2x+y=7 \dots (1)$$

$$\text{আবার, } \therefore a^{3y} \cdot a^{3x+5} = a^{20}, \therefore a^{3x+3y+5} = a^{20},$$

$$\therefore 3x+3y+5=20, \text{ বা, } 3x+3y=15 \dots (2)$$

(1) ও (2) সমাধান করিয়া পাই  $x=2, y=3$ .



## 52. করণী সংক্রান্ত সমীকরণ

উদা. 38. Solve  $\sqrt{x+6} + \sqrt{x-2} = 4$ . [ C. U. '47 ]

$$\sqrt{x+6} + \sqrt{x-2} = 4,$$

বা,  $\sqrt{x+6} = 4 - \sqrt{x-2},$

বা,  $x+6 = 16 + x - 2 - 8\sqrt{x-2}$  [ উভয় পক্ষের বর্গ করিয়া ]

বা,  $8\sqrt{x-2} = 16 - 2 - 6 = 8$ , বা,  $\sqrt{x-2} = 1$ , বা,  $x-2 = 1$

$\therefore x = 3.$

উদা. 39. Solve  $\frac{\sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2+x^2} - \sqrt{a^2-x^2}} = 5.$

এখানে comp. & div. করিয়া পাই,

$$\frac{2\sqrt{a^2+x^2}}{2\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{5+1}{5-1}, \quad \text{বা,} \quad \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2},$$

বা,  $\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2} = \frac{9}{4}$  [ বর্গ করিয়া ], বা,  $\frac{2a^2}{2x^2} = \frac{13}{5}$

[ comp. and div. করিয়া ]

বা,  $\frac{a^2}{x^2} = \frac{13}{5}$  বা,  $13x^2 = 5a^2$ , বা,  $x^2 = \frac{5}{13}a^2$ ,  $\therefore x = \pm a\sqrt{\frac{5}{13}}$ .

উদা. 40. Solve  $2(x+2) = 1 + \sqrt{4x^2+9x+14}$  [ C. U. ]

বা,  $2x+4 = 1 + \sqrt{4x^2+9x+14}$

বা,  $2x+3 = \sqrt{4x^2+9x+14},$

বা,  $4x^2+12x+9 = 4x^2+9x+14$  [ বর্গ করিয়া ]

বা,  $3x = 5$ ,  $\therefore x = \frac{5}{3}.$

উদা. 41. Solve  $2 - \sqrt{11x^2+5x+3} = x.$

বা,  $-\sqrt{11x^2+5x+3} = x-2,$

বা,  $11x^2+5x+3 = x^2-4x+4$  [ বর্গ করিয়া ]

বা,  $10x^2+9x-1 = 0,$

বা,  $10x^2 + 10x - x - 1 = 0$ , বা,  $(10x - 1)(x + 1) = 0$ ,  
 $\therefore x = \frac{1}{10}$  বা  $-1$ .

[ উদা. 47এর নীচে 'প্রটো'টি দেখ। ]

উদা. 42. Solve  $\frac{x - ax}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x}$ .

বজ্রগুণন দ্বারা পাই  $x^2 - ax^2 = x$ , বা,  $x^2(1 - a) - x = 0$ ,

বা,  $x\{x(1 - a) - 1\} = 0$ ,  $\therefore$  হয়  $x = 0$ , অথবা  $x(1 - a) - 1 = 0$ ;

$\therefore x = 0$ , বা,  $\frac{1}{1 - a}$ .

উদা. 43. Solve  $\frac{ax - 1}{\sqrt{ax} + 1} = 4 + \frac{\sqrt{ax} - 1}{2}$ .

$\therefore ax - 1 = (\sqrt{ax})^2 - (1)^2$ ,

$\therefore$  প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই

$\frac{(\sqrt{ax} + 1)(\sqrt{ax} - 1)}{\sqrt{ax} + 1} = 4 + \frac{\sqrt{ax} - 1}{2}$ ,

বা,  $(\sqrt{ax} - 1) = 4 + \frac{\sqrt{ax} - 1}{2}$ , বা  $(\sqrt{ax} - 1) - \frac{\sqrt{ax} - 1}{2} = 4$ ,

বা,  $\frac{\sqrt{ax} - 1}{2} = 4$ , বা,  $\sqrt{ax} - 1 = 8$ , বা,  $\sqrt{ax} = 9$ ,

$\therefore ax = 81$ ,  $\therefore x = \frac{81}{a}$ .

উদা. 44. Solve  $\sqrt{x} + \sqrt{x + 4} = \frac{2}{\sqrt{x}}$ . [ C. U. ]

বজ্রগুণন করিয়া পাই  $x + \sqrt{x^2 + 4x} = 2$ ,

বা,  $\sqrt{x^2 + 4x} = 2 - x$ , বা  $x^2 + 4x = 4 - 4x + x^2$ ,

বা,  $8x = 4$ ,  $\therefore x = \frac{1}{2}$ .

উদা. 45. Solve  $\sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{x^2 - 9} = 4 + \sqrt{34}$ . [C. U. '27]

উভয় পক্ষের বর্গ করিয়া পাই  $x^2 + 9 + x^2 - 9 + 2\sqrt{x^4 - 81}$   
 $= 16 + 34 + 8\sqrt{34}$

$$\text{বা, } 2x^2 + 2\sqrt{x^4 - 81} = 50 + 8\sqrt{34}.$$

এখন করণীর নিয়ম অনুসারে উভয়পক্ষের মূলদ রাশিষয় সমান,

$$\therefore 2x^2 = 50, \text{ বা, } x^2 = 25, \therefore x = \pm 5.$$

$$\text{উদা. 46. Solve } \sqrt{3x^2 + 16} - \sqrt{3x^2 - 16} = 8 - 4\sqrt{2} \dots (1)$$

$$[ \text{অনু প্রণালী} ] (3x^2 + 16) - (3x^2 - 16) = 32$$

$$\text{অর্থাৎ } (\sqrt{3x^2 + 16})^2 - (\sqrt{3x^2 - 16})^2 = 32 \dots \dots \dots (2)$$

$$(2) \div (1) \text{ করিয়া পাই } \sqrt{3x^2 + 16} + \sqrt{3x^2 - 16} = \frac{32}{8 - 4\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{বা, } \sqrt{3x^2 + 16} + \sqrt{3x^2 - 16} &= \frac{32(8 + 4\sqrt{2})}{(8)^2 - (4\sqrt{2})^2} = \frac{32(8 + 4\sqrt{2})}{32} \\ &= 8 + 4\sqrt{2} \dots (3) \end{aligned}$$

$$\text{এখন (1) + (3) করিয়া পাই } 2\sqrt{3x^2 + 16} = 16, \text{ বা, } \sqrt{3x^2 + 16} = 8,$$

$$\therefore 3x^2 + 16 = 64, \text{ বা, } x^2 = 16, \therefore x = \pm 4.$$

$$\text{উদা. 47. Solve } 4x^2 + 6x + \sqrt{2x^2 + 3x + 4} = 13.$$

[ W. B. S. F. '53 ]

$$\text{বা, } 4x^2 + 6x + 8 + \sqrt{2x^2 + 3x + 4} = 21 \text{ [উভয় পক্ষে 8 যোগ করিয়া]}$$

$$\text{বা, } 2(2x^2 + 3x + 4) + \sqrt{2x^2 + 3x + 4} = 21,$$

$$\text{বা, } 2a + \sqrt{a} = 21 \text{ [ মনে কর, } a = 2x^2 + 3x + 4 \text{ ]}$$

$$\text{বা, } 2a - 21 = -\sqrt{a}, \text{ বর্গ, } 4a^2 - 84a + 441 = a \text{ [ বর্গ করিয়া ]}$$

$$\text{বা, } 4a^2 - 85a + 441 = 0, \text{ বা, } 4a^2 - 36a - 49a + 441 = 0,$$

$$\text{বা, } (a - 9)(4a - 49) = 0, \therefore a = 9 \text{ অথবা } \frac{49}{4}.$$

$$\text{এক্ষেপে, যদি } a = 9 \text{ হয়, তবে } 2x^2 + 3x + 4 = 9,$$

$$\text{বা, } 2x^2 + 3x - 5 = 0, \text{ বা, } (x - 1)(2x + 5) = 0, \therefore x = 1 \text{ বা } -\frac{5}{2}.$$

$$\text{আবার, } a = \frac{49}{4} \text{ হইলে } 2x^2 + 3x + 4 = \frac{49}{4} \text{ হয়,}$$

$$\text{বা, } 8x^2 + 12x + 16 = 49, \text{ বা, } 8x^2 + 12x - 33 = 0,$$

$$\therefore x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 1056}}{16} = \frac{-12 \pm 20\sqrt{3}}{16} = \frac{-3 \pm 5\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{অতএব, } x = 1, -\frac{5}{2}, \text{ বা } \frac{-3 \pm 5\sqrt{3}}{4}.$$

এখানে দেখা যায় যে,  $x$  এর মান 1 ও  $-\frac{5}{4}$  ধরিলে সমীকরণটি সিদ্ধ হয়, কিন্তু  $x = \frac{-3 \pm 5\sqrt{3}}{4}$  ধরিলে উহা সিদ্ধ হয় না। অতএব  $x$  এর ঐ মান দুইটি গ্রহণ করা যাইবে না। উহারা অবাস্তব বীজ।

$\therefore$  এখানে নির্ণেয় বীজ হইল  $x=1$  বা  $-\frac{5}{4}$ .

[জটিল্য : এহলে  $x = \frac{-3 \pm 5\sqrt{3}}{4}$  কে প্রদত্ত সমীকরণের অবাস্তব বীজ (extraneous roots) বলে। ঐ বীজ  $4x^2 + 6x - \sqrt{2x^2 + 3x + 4} = 13$  সমীকরণকে সিদ্ধ করে, প্রদত্ত সমীকরণকে নহে।

সাধন : যে ক্ষেত্রে উভয়পক্ষের বর্গ করিয়া সমীকরণ সমাধান করিতে হয়, সে ক্ষেত্রে প্রাপ্ত সকল বীজ দ্বারা সমীকরণটি হয়ত সিদ্ধ না হইতে পারে। ঐরূপ স্থলে প্রাপ্ত কোন বীজ দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয় তাহা দেখিয়া লইয়া উত্তর লিখিবে। এইরূপ দেখিবার সময় বর্গমূল ধনাত্মক ধরিবে। যে প্রাপ্ত বীজ দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না তাকে অবাস্তব বীজ বলে। উহাকে উত্তরে ধরিবে না—উহা অবাস্তব বীজ বলিয়া লিখিয়া দিবে।]

উদা. 48 Solve  $\frac{x^2 - 3x - 24}{x^2 - 9} + \frac{4}{x - 3} = 1\frac{1}{2}$ .

উভয় পক্ষকে  $5(x^2 - 9)$  বা  $5(x+3)(x-3)$  দ্বারা গুণ করিয়া পাই

$$5(x^2 - 3x - 24) + 20(x + 3) = 6(x^2 - 9) \quad \dots (1)$$

$$\text{বা, } 5x^2 - 15x - 120 + 20x + 60 = 6x^2 - 54,$$

$$\text{বা, } x^2 - 5x + 6 = 0, \quad \text{বা, } (x-2)(x-3) = 0, \quad \therefore x=2 \text{ বা } 3.$$

এখানে কিন্তু দেখা যায় যে,  $x=2$  ধরিলে সমীকরণটি সিদ্ধ হয়, কিন্তু  $x=3$  ধরিলে তাহা হয় না।  $x$  এর মান 3 ধরিলে আমরা সমীকরণটি হইতে পাই  $\frac{-24}{0} + \frac{4}{0} = 1\frac{1}{2}$ , কিন্তু ইহা অসম্ভব।

$\therefore x=3$  এই সমাধানটি গ্রাহ্য নহে, এখানে 3 হইল অবাস্তব বীজ।

$\therefore$  নির্ণেয় সমাধান  $x=2$  হইবে।

[ জ্যেষ্ঠব্য : উপরের উদাহরণে সমীকরণের উভয়পক্ষকে  $5(x+3)(x-3)$  দ্বারা গুণ করিয়া দুই পক্ষের গুণফল সমান ধরা হইয়াছে, কিন্তু  $x-3=0$  হইলে এই প্রক্রিয়াটি অসঙ্গত হইবে। ]

### বিবিধ সমীকরণের সমাধান

উদা. 49. Solve  $x^2 + \frac{36}{x^2} = 13$ . [ C. U. '31 ]

বা,  $x^4 + 36 = 13x^2$ , বা  $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ ,

বা,  $(x^2 - 9)(x^2 - 4) = 0$ , বা,  $(x-3)(x+3)(x-2)(x+2) = 0$ ,

$\therefore x = \pm 3$  অথবা  $\pm 2$ .

উদা. 50. Solve  $x^6 - 28x^3 + 27 = 0$ . [D. B. '31]

বা,  $x^6 - 27x^3 - x^3 + 27 = 0$ ,

বা,  $x^3(x^3 - 27) - 1(x^3 - 27) = 0$ , বা  $(x^3 - 1)(x^3 - 27) = 0$ ,

বা,  $(x-1)(x^2+x+1)(x-3)(x^2+3x+9) = 0$ ,

$\therefore x-1=0 \dots (1)$ ,  $x^2+x+1=0 \dots (2)$ ,  $x-3=0 \dots (3)$ ,

অথবা,  $x^2+3x+9=0 \dots (4)$ . এখন (1) হইতে পাই  $x=1$ ;

(2) হইতে  $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ ;

(3) হইতে  $x=3$ ; (4) হইতে  $x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 36}}{2}$

$= \frac{-3 \pm \sqrt{-27}}{2} = \frac{-3 \pm 3\sqrt{-3}}{2} = \frac{3}{2}(-1 \pm \sqrt{-3})$ .

অতএব,  $x=1, \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}, 3, \frac{3}{2}(-1 \pm \sqrt{-3})$ .

[ জ্যেষ্ঠব্য : উপরের উদাহরণে লব্ধ বীজগুলিতে দেখ  $\sqrt{-3}$ এর কোন বাস্তব মান বা অস্তিত্ব নাই, কারণ  $-3$ এর বর্গমূল নির্ণয় করা যায় না। বীজগণিতে কিন্তু  $\sqrt{-3}$ ,  $\sqrt{-4}$  প্রভৃতি এই দ্বিতীয় রাশি দেখা যায়, সেইজন্য এইরূপ রাশিকে কাল্পনিক বা অবাস্তব (imaginary) রাশি বলা হয়। ]

উদা. 51. Solve  $(1+x)^{\frac{1}{3}} + (1-x)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}$ .

[C. U. ; D. B. '46, '51]

উভয় পক্ষের ঘন বা cube করিয়া পাই

$$1+x+1-x+3(1+x)^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{1}{3}}\{(1+x)^{\frac{1}{3}}+(1-x)^{\frac{1}{3}}\}=2,$$

বা,  $2+3(1-x^2)^{\frac{1}{3}}.2^{\frac{1}{3}}=2$  [ $\because \{(1+x)^{\frac{1}{3}}+(1-x)^{\frac{1}{3}}\}=2^{\frac{1}{3}}$  (সীকার)]

বা,  $3(1-x^2)^{\frac{1}{3}}.2^{\frac{1}{3}}=0$ ,  $\therefore (1-x^2)^{\frac{1}{3}}=0$ ,  $\therefore 1-x^2=0$ ,

বা,  $x^2=1$ ,  $\therefore x=\pm 1$ .

### Exercise 10

Solve :—

1.  $5x^2+3=128$

2.  $(2x-1)^2=5-4x$ .

3.  $2x-\frac{3}{x}=\frac{x}{2}$ .

4.  $\frac{2x+1}{x+1}=\frac{x+8}{x+4}$ . [C. U. '31]

5.  $42x^2-41x-20=0$ . [C. U. '13]

6.  $3x^2-10x+3=0$ . [C. U. '33]

7.  $4x^2-65x+126=0$ . [C. U. '16]

8.  $6x^2-11x-10=0$ . [C. U. '22]

9.  $(17x-8)(x-2)=555$ . [C. U. '32]

10.  $17x^2+19x=1848$ . [C. U. '11]

11.  $6x^2-91x+323=0$ . [C. U. '14]

12.  $(x-7)(x-19)=64$ . [C. U. '18]

13.  $(x+4)(2x-3)=6$ . [B. U. '29]

14.  $\frac{x}{3}+\frac{3}{x}=4\frac{1}{2}$ . [C. U. '31]

15.  $x^2-6x+2=0$ . [G. U. '48]

16.  $\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}=2\frac{1}{2}$ , [E. B. S. B. '50]

17.  $x^2-2\sqrt{13}x+4=0$ . [C. U. '49]

$$18. \frac{x+3}{x-3} + 6\frac{x-3}{x+3} = 5. \quad [\text{W. B. S. F. '52}]$$

$$19. \frac{-3}{x+3} - \frac{x+3}{x-3} + 6\frac{6}{7} = 0. \quad [\text{C. U. '11}]$$

$$20. \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = \frac{25}{12}. \quad [\text{C. U. '10}]$$

$$21. x^2 - 10x + 8 = 0. \quad [\text{C. U. '47}]$$

$$22. \frac{12x+17}{3x+1} - \frac{2x+15}{x+7} = 3\frac{1}{2}. \quad [\text{C. U. '20}]$$

$$23. \frac{40}{x-5} + \frac{27}{x} = 13. \quad [\text{D. B. '26}] \quad \vee \quad 24. \quad x + \frac{1}{x} = 6\frac{1}{8}.$$

$$25. \frac{x-6}{x+2} + \frac{x-10}{x+6} + 2 = 0. \quad [\text{C. U. '28}]$$

$$26. \frac{x+1}{x-1} + \frac{x+2}{x-2} = \frac{2x+13}{x+1}.$$

$$27. \frac{x+1}{2} + \frac{2}{x+1} = \frac{x+1}{3} + \frac{3}{x+1} - \frac{5}{6}. \quad [\text{C. U. '36}]$$

$$28. \frac{x-3}{x+3} + \frac{x+3}{x-3} = \frac{2(x+4)}{x-4}.$$

$$29. \left(\frac{x-a}{x+a}\right)^2 - 5\left(\frac{x-a}{x+a}\right) + 6 = 0. \quad [\text{P. U.}]$$

$$30. 1+x = \frac{3}{4-\frac{3}{4-x}}. \quad [\text{C. U. '44}]$$

$$31. \sqrt{5x-1} = 1 + \sqrt{5x-2}. \quad [\text{C. U.}]$$

$$32. \sqrt{x+1} + \sqrt{x+8} = \sqrt{6x+1} \quad [\text{C. U. '20 ; D. B. '30}]$$

$$33. x^2 - 2\sqrt{3x-13} = 0. \quad [\text{C. U. '46}]$$

$$34. x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} = 12. \quad \vee \quad 35. 4^x + 2^{x+2} = 96. \quad [\text{D. B. '47}]$$

$$36. \sqrt{a+x} + \sqrt{x} = \frac{ma}{\sqrt{a+x}}. \quad [\text{P. U.}]$$

$$37. 2(4^x - 3 \cdot 2^{x-1}) + 1 = 0.$$

38.  $x^{-3} + x^{-\frac{3}{2}} = 2$       39.  $(\sqrt{2})^{3x+1} = 256.$
40.  $\left(\frac{p}{q}\right)^{x-2} = \left(\frac{q}{p}\right)^{2x-1}.$       41.  $(\sqrt[3]{36})^{2x+1} = (\sqrt[5]{216})^{x+6}.$
42.  $5^{x-2} + 5^{1-x} = 1\frac{1}{5}.$       43.  $2^{x-2} + 2^{3-x} = 3.$  [C. U. '40]
44.  $2^{2x-2} = 2^{x-3} - \frac{1}{8}.$  [C. U. (D. M. H.) '51]
45.  $12^x + 12^{-x} = 144\frac{1}{4}.$
46.  $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-3} = 5.$  [C. U. '29, '41]
47.  $a^{2x-1} = b^{2x-1}.$
48.  $4^x - 3 \cdot 2^{x+2} + 32 = 0.$  [W. B. S. F. '53]
49.  $x^2 + 2(b-c)x + c^2 = 2bc.$
50.  $\sqrt{2x^2+9} + \sqrt{2x^2-9} = 9 + 3\sqrt{7}.$
51.  $3^{x+y} = 3^{2x-y} = \sqrt{27}.$       52.  $3 \cdot 2^{x+1} = 8 + 4^x.$
53.  $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = 5.$  [C. U. '46]
54.  $\sqrt{x} + \sqrt{x-9} = \frac{36}{\sqrt{x-9}}$  [C. U. '50 ; Pat. U. '21]
55.  $4^{\frac{x+1}{2}} \cdot 8^{\frac{x-1}{3}} = 2^{\frac{5x+7}{3}} \cdot 16^{\frac{x-1}{7}}.$
56.  $\sqrt{x^2+11x+20} - \sqrt{x^2+5x-1} = 3.$  [C. U.]
57.  $\sqrt{\frac{x+a}{x-b} + \frac{a}{x}} = \sqrt{\frac{x-b}{x-a} + \frac{b}{x}}.$  [M. U.]
58.  $\sqrt{2x-9} - \sqrt{x-4} = \sqrt{x+1}.$
59. (1)  $\frac{x}{\sqrt{x+3}} = 3 + \frac{3-\sqrt{x}}{2}.$
60.  $\left. \begin{aligned} \text{(ii)} \quad \frac{5^x}{5^y} &= 25 \\ \frac{4^y}{2^x} &= 2 \end{aligned} \right\}$  [G. U. '54]
60.  $5^{x^2+x+1} \cdot 6^{x^2+x+2} = 162000.$



$$(61) \quad \frac{x-a}{x-b} + \frac{x-b}{x-a} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}. \quad [\text{P. U. 1891}]$$

$$62. \quad 4 \times 2^{x-1} = 8^x. \quad [\text{D. B. '31}]$$

$$(63) \quad 4^{x+\frac{1}{2}} + 4 = 36(2^{x-2}). \quad [\text{W. B. S. F. '52}]$$

$$64. \quad 9(9^{x-1} + 3) = 28 \times 3^x.$$

$$65. \quad ax^2 - bx - c = 0. \quad [\text{C. U. '44}]$$

$$66. \quad \frac{1}{a+b+x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x}. \quad [\text{D. B. '40, '43}]$$

$$67. \quad 6(x^4 + 1) = 13x^2. \quad [\text{D. B. '32}]$$

$$68. \quad 3x^{\frac{1}{2}} - \frac{8}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{10}{x^{\frac{1}{2}}} = 0. \quad [\text{D. B. '35}]$$

$$69. \quad a^x \cdot a^{y+1} = a^7, \quad a^{2y} \cdot a^{3x+5} = a^{20}. \quad [\text{C. U. 1878}]$$

$$70. \quad (p+x)^{\frac{2}{3}} + (p-x)^{\frac{2}{3}} = 3(p^2 - x^2)^{\frac{1}{3}}.$$

Solve without assuming any formula :

$$71. \quad 3x^2 + 4x = 8. \quad [\text{C. U. '51}]$$

$$72. \quad x^2 - x = 1806 \quad [\text{C. U. '17}] \quad 73. \quad 63x^2 - 62x = 221.$$

$$74. \quad \text{Find the value of } x \text{ for which } ax^2 - (a+1)x + 1 = 0.$$

$$75. \quad \text{Solve } 15x^2 - 11x - 31 = 0 \text{ and find the values of the roots correct to 2 decimal places.} \quad [\text{G. U. '54}]$$

## দ্বিঘাত সমীকরণ সংক্রান্ত বিবিধ প্রশ্ন ( Problems on Quadratic Equations )

53. দ্বিঘাত সমীকরণ সংক্রান্ত প্রশ্নগুলির সমাধানকালে অনেক সময় দেখা যায় যে, অজ্ঞাত রাশিটির প্রাপ্ত দুইটি মানই প্রশ্নের সর্ত<sup>০</sup>পূরণ করে না। সুতরাং প্রত্যেক ফলটিকে পরীক্ষা করিয়া তবে উত্তররূপে গ্রহণ করিবে।

### উদাহরণমালা 12

উদা. 1. Find two consecutive numbers the sum of whose squares is 145. [C. U. '16]

মনে কর, প্রথম সংখ্যা  $x$ , সুতরাং উহার পরবর্তী সংখ্যা  $x+1$ .

$$\therefore \text{ সর্ত অনুসারে পাই } x^2 + (x+1)^2 = 145,$$

$$\text{বা, } x^2 + x^2 + 2x + 1 = 145, \text{ বা, } 2x^2 + 2x - 144 = 0,$$

$$\text{বা, } x^2 + x - 72 = 0, \text{ বা, } (x+9)(x-8) = 0, \therefore x = -9 \text{ বা } 8;$$

$$\therefore \text{ নির্ণেয় সংখ্যাদ্বয়} = 8 \text{ ও } 9, \text{ অথবা } -9 \text{ ও } -8.$$

[ জটিল্য : প্রথমটি কেবল পাটীগণিতীয় সমাধান, উভয়ই বীজগণিতীয় সমাধান। ]

উদা. 2. Find two consecutive odd numbers whose product is 899. [Pat. U. '24]

মনে কর,  $2x-1$  ও  $2x+1$  পর পর দুইটি অযুগ্ম সংখ্যা।

$$\therefore \text{ সর্তানুসারে, } (2x-1)(2x+1) = 899, \text{ বা, } 4x^2 - 1 = 899,$$

$$\text{বা, } 4x^2 = 900, \text{ বা, } x^2 = 225, \therefore x = \pm 15.$$

$$\therefore \text{ নির্ণেয় সংখ্যাদ্বয়} = 29 \text{ ও } 31 \text{ অথবা } -31 \text{ ও } -29.$$

[ জটিল্য :  $x$  এর যে কোন অর্থও মানে  $2x$  একটি যুগ্ম সংখ্যা,  $\therefore 2x+1$ , বা,  $2x-1$  অযুগ্ম সংখ্যা। ]

উদা. 3. A man bought a certain number of books for Rs. 20. Had he obtained one more book for the same sum, the average price of each would have been a rupee less. Find the number of books bought.

মনে কর, পুস্তকের সংখ্যা  $x$ , হুভরাং প্রত্যেক পুস্তকের গড়মূল্য  $\frac{20}{x}$  টাকা, যদি 20 টাকায়  $x+1$  সংখ্যক পুস্তক কেনা হইত, তবে প্রত্যেকের গড়মূল্য হইত  $\frac{20}{x+1}$  টাকা।

$$\therefore \text{সর্তাহুসারে } \frac{20}{x+1} = \frac{20}{x} - 1, \text{ বা, } \frac{20}{x+1} = \frac{20-x}{x},$$

$$\text{বা, } 20x = 20x + 20 - x^2 - x, \text{ বা, } x^2 + x - 20 = 0,$$

$$\text{বা, } (x+5)(x-4) = 3, \therefore x = -5 \text{ বা } 4,$$

এখানে যেহেতু পুস্তকের সংখ্যা ঋণাত্মক হইতে পারে না, সেইজন্য  $x$ -এর মান  $-5$  গ্রাহ্য হইবে না।

$$\therefore \text{নির্ণেয় পুস্তকের সংখ্যা} = 4.$$

উদা. 4. Divide unity into two parts such that the sum of their cubes is  $\frac{7}{8}$ . [C. U. '15]

মনে কর, একটি অংশ  $x$ , হুভরাং অত্র অংশ  $1-x$ .

$$\therefore \text{সর্তাহুসারে, } (x)^3 + (1-x)^3 = \frac{7}{8},$$

$$\text{বা, } x^3 + 1 - 3x + 3x^2 - x^3 = \frac{7}{8}, \text{ বা, } 3x^2 - 3x + \frac{1}{8} = 0,$$

$$\text{বা, } 48x^2 - 48x + 9 = 0, \text{ বা, } 16x^2 - 16x + 3 = 0,$$

$$\text{বা, } 16x^2 - 12x - 4x + 3 = 0, \text{ বা, } (4x-1)(4x-3) = 0,$$

$$\therefore x = \frac{1}{4} \text{ বা } \frac{3}{4}. \therefore \text{নির্ণেয় অংশদ্বয়} = \frac{1}{4} \text{ ও } \frac{3}{4}.$$

উদা. 5. Divide 50 into two parts such that the sum of their reciprocals may be  $\frac{1}{12}$ . [C. U. '13]

মনে কর, প্রথম অংশ  $x$ , হুভরাং দ্বিতীয় অংশ  $= 50 - x$ .

$$\therefore \text{সর্তাহুসারে, } \frac{1}{x} + \frac{1}{50-x} = \frac{1}{12}, \text{ বা, } \frac{50-x+x}{x(50-x)} = \frac{1}{12},$$

$$\text{বা, } \frac{50}{50x-x^2} = \frac{1}{12}, \text{ বা, } 600 = 50x - x^2,$$

$$\text{বা, } x^2 - 50x + 600 = 0, \text{ বা, } x^2 - 30x - 20x + 600 = 0,$$

$$\text{বা } (x-20)(x-30) = 0, \therefore x = 20 \text{ বা } 30.$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় অংশদ্বয়} = 20 \text{ ও } 30.$$

[ জটিল্য : দুইটি সংখ্যার গুণফল 1 হইলে একটিকে অপরটির অন্তোত্তক (reciprocal) বলে। যথা,  $\frac{1}{2}$  এর অন্তোত্তক  $\frac{2}{1}$ , 5 এর অন্তোত্তক  $\frac{1}{5}$  ইত্যাদি। ]

উদা. 6. The difference between a proper fraction and its reciprocal is  $\frac{9}{10}$ . Find the fraction. [C. U. '41 ; D. B. '29]

মনে কর, প্রকৃত ভগ্নাংশটি  $x$ , সুতরাং উহার অন্তোত্তক  $= \frac{1}{x}$ .

$\therefore x$  একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ,  $\therefore$  উহার লব অপেক্ষা হর বৃহত্তর,

সুতরাং  $\frac{1}{x}$  এর হর অপেক্ষা লব বৃহত্তর হইবে।  $\therefore \frac{1}{x} > x$ .

$\therefore$  সর্তানুসারে,  $\frac{1}{x} - x = \frac{9}{10}$ , বা,  $20 - 20x^2 = 9x$ ,

বা,  $20x^2 + 9x - 20 = 0$ , বা,  $20x^2 + 25x - 16x - 20 = 0$ ,

বা,  $(4x+5)(5x-4) = 0$ ,  $x = -\frac{5}{4}$  বা  $\frac{4}{5}$ .

$\therefore$  নির্ণেয় ভগ্নাংশ  $= \frac{4}{5}$ ;  $-\frac{5}{4}$  প্রকৃত ভগ্নাংশ নহে বলিয়া উহা গ্রাহ্য হইল না।

উদা. 7. The sum of two numbers is 45 and the mean proportional between them is 18; find them. [B. U. '29]

মনে কর, প্রথম সংখ্যা  $x$ , সুতরাং দ্বিতীয় সংখ্যা  $= 45 - x$ .

$\therefore$  উহাদের মধ্য সমানুপাতী  $= 18$ ,  $\therefore x(45 - x) = 18^2$ ,

বা,  $45x - x^2 = 324$ , বা,  $-x^2 + 45x - 324 = 0$ ,

বা,  $x^2 - 45x + 324 = 0$ , বা,  $(x - 36)(x - 9) = 0$ ,  $\therefore x = 9, 36$ .

$\therefore$  নির্ণেয় সংখ্যাদ্বয়  $= 9$  ও  $36$ .

উদা. 8. A certain number exceeds its reciprocal by 1. How many such numbers are there? Find them. [C.U. '34]

মনে কর, সংখ্যাটি  $x$ , সুতরাং উহার অন্তোত্তক  $\frac{1}{x}$ .

$\therefore$  সর্তানুসারে  $x - \frac{1}{x} = 1$ , বা,  $x^2 - 1 = x$ , বা,  $x^2 - x - 1 = 0$ ,

$\therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times -1}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ .

$\therefore$  উদ্দিষ্ট সংখ্যা দুইটি হইবে; একটি  $= \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ , অন্যটি  $= \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ .

উদা. 9. Show that the product of any four consecutive numbers increased by unity is a perfect square.

মনে কর,  $x, x+1, x+2$  এবং  $x+3$  পরপর চারিটি সংখ্যা। উহাদের গুণফলের সহিত এক যোগ করিয়া পাই

$$\begin{aligned} x(x+1)(x+2)(x+3)+1 &= \{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\}+1 \\ &= (x^2+3x)(x^2+3x+2)+1 = a(a+2)+1 \quad [x^2+3x=a \text{ ধরিয়া}] \\ &= a^2+2a+1 = (a+1)^2 = (x^2+3x+1)^2, \text{ ইহা একটি পূর্ণবর্গ।} \end{aligned}$$

উদা. 10. The hypotenuse of a right-angled triangle is 20 inches. If the difference between its other two sides be 4 inches, find the sides. [G. U. '49]

মনে কর, ক্ষুদ্রতর বাহু  $=x$  ইঞ্চি, স্তূতরাং বৃহত্তর বাহু  $=x+4$  ইঞ্চি।

$$\therefore x^2 + (x+4)^2 = 20^2, \text{ বা, } x^2 + x^2 + 8x + 16 = 400,$$

$$\text{বা, } 2x^2 + 8x - 384 = 0, \text{ বা, } x^2 + 4x - 192 = 0,$$

$$\text{বা, } (x+16)(x-12) = 0, \therefore x = -16 \text{ বা } 12.$$

$$\therefore \text{ক্ষুদ্রতর বাহু} = 12 \text{ ইঞ্চি এবং বৃহত্তর বাহু} = (12+4) \text{ ই.} = 16 \text{ ই.}$$

উদা. 11. The area of a rectangular plot of land fenced all round is 2000 sq. yards and the total length of fencing is 180 yds. Obtain a quadratic equation to determine the length of the plot. [C. U. '33]

$$2(\text{দৈর্ঘ্য} + \text{প্রস্থ}) = \text{পরিসীমা} = \text{বেড়ার মোট মাপ} = 180 \text{ গজ।}$$

$$\therefore \text{দৈর্ঘ্য} + \text{প্রস্থ} = 90 \text{ গজ। মনে কর, দৈর্ঘ্য } x \text{ গজ, স্তূতরাং প্রস্থ} = (90-x) \text{ গজ।} \therefore \text{প্রথম সর্ত হইতে পাই } x(90-x) = 2000,$$

$$\text{বা, } x^2 - 90x + 2000 = 0, \text{ ইহাই উদ্ভিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ।}$$

ইহার সমাধান করিলে পাই  $x = 40$  বা  $50$ .

$$\therefore \text{নির্ণয় দৈর্ঘ্য} = 50 \text{ গজ [} \because \text{দৈর্ঘ্য} > \text{প্রস্থ}]$$

উদা. 12. A cyclist travels 84 miles and finds that he could have made the journey in 5 hours less if he had travelled 5 miles an hour faster. At what rate did he travel?

[G. U. '50]

মনে কর, লোকটির গতি ঘণ্টায়  $x$  মাইল।  $\therefore$  84 মা. বাইতে সময় লাগে  $\frac{84}{x}$  ঘণ্টা। গতি ঘণ্টায়  $(x+5)$  মা. হইলে, 84 মা. বাইতে লাগে  $\frac{84}{x+5}$  ঘণ্টা।

$$\therefore \frac{84}{x} - \frac{84}{x+5} = 5, \text{ বা, } \frac{84x+420-84x}{x(x+5)} = 5, \text{ বা, } \frac{420}{x^2+5x} = 5,$$

$$\text{বা, } 5(x^2+5x)=420, \text{ বা, } x^2+5x=84, \text{ বা, } x^2+5x-84=0, \\ \text{বা, } (x+12)(x-7)=0, \therefore x=-12 \text{ বা } 7.$$

$\therefore$  গতি ঋণাত্মক হইতে পারে না,  $\therefore$  নির্ণেয় গতি ঘণ্টায় 7 মাইল।

**উদা. 13.** The perpendicular drawn from the centre of a circle to a certain chord is 3 inches less than half the chord. If the radius be 15 inches, find the length of the chord.

বৃত্তের কেন্দ্র হইতে কোন জ্যা-এর উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। মনে কর, AB জ্যা-এর উপর কেন্দ্র O হইতে OD লম্ব টানা হইয়াছে। এক্ষণে OAD একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

মনে কর, OD =  $x$  ইঞ্চি, সুতরাং AD =  $x+3$  ইঞ্চি, এবং অতিভুজ OA = 15 ই. ,  $\therefore x^2+(x+3)^2=15^2$ , বা,  $2x^2+6x+9=225$ , বা,  $2x^2+6x-216=0$ , বা  $x^2+3x-108=0$ , বা  $(x+12)(x-9)=0$ ,  $\therefore x=-12$  বা 9.  $\therefore$  লম্বের মাপ ঋণাত্মক হইতে পারে না,  $\therefore$  লম্বটি = 9 ই.।

$\therefore$  নির্ণেয় জ্যা-এর দৈর্ঘ্য =  $2(x+3)$  ই. =  $2(9+3)$  ই. = 24 ইঞ্চি।

**উদা. 14.** A boatman can row 7 miles down a river and back in  $4\frac{3}{4}$  hours. If the river runs at 2 miles an hour, find the rate of the pull in still water. [D. B. '47]

মনে কর, দাঁড়ের বেগ ঘণ্টায়  $x$  মাইল।  $\therefore$  স্রোতের অঙ্কুলে নৌকার গতি ঘণ্টায়  $x+2$  মাইল এবং প্রতিকুলে ঘণ্টায়  $x-2$  মাইল।

$$\therefore \frac{7}{x+2} + \frac{7}{x-2} = 4\frac{3}{4}, \text{ বা, } \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} = \frac{2}{3}$$

[ উভয়পক্ষকে 7 দ্বারা ভাগ করিয়া ]

$$\text{বা, } \frac{x-2+x+2}{x^2-4} = \frac{2}{3} \text{ বা, } x^2-3x-4=0,$$

বা,  $(x-4)(x+1)=0$ ,  $\therefore x=4$  বা  $-1$ .

$\therefore$  দাঁড়ের বেগ  $-1$  হইতে পারে না,

$\therefore$  নির্ণেয় দাঁড়ের বেগ = ঘন্টার 4 মাইল।

**উদা. 15.** A regiment of soldiers, when formed into a solid square, has 16 men fewer in the front than when formed into a hollow square 4 deep. Find the numbers of soldiers.

[ D. B. '40 ]

মনে কর, শূন্যগর্ভ বর্গাকারে সাজাইবার সময় সম্মুখ সারির সৈন্যসংখ্যা  $=x$ ,  
 হুতরাং মোট সৈন্যসংখ্যা  $=x^2 - (x - 4 \times 2)^2 = x^2 - (x-8)^2$ .

আবার, নিরেট বর্গাকারে সাজাইবার সময় সম্মুখ সারির সৈন্যসংখ্যা  $=x-16$ .  $\therefore$  মোট সৈন্যসংখ্যা  $=(x-16)^2$ .

$\therefore$  সর্তাহসারে  $(x-16)^2 = x^2 - (x-8)^2$ ,

বা,  $x^2 - 32x + 256 = x^2 - x^2 + 16x - 64$ ,

বা,  $x^2 - 48x + 320 = 0$ , বা,  $(x-40)(x-8)=0$ ,

$\therefore x=40$  বা  $8$ .

এখানে  $x$  এর মান 8 গ্রাহ্য হইতে পারে না, কারণ 8 অপেক্ষা 16 জন কম সম্মুখ সারির লোক হওয়া সম্ভব হইবে না।

$\therefore$  নির্ণেয় সৈন্যসংখ্যা  $=(x-16)^2 = (40-16)^2 = 24^2 = 576$ .

**উদা. 16.** What is the price of eggs per dozen, if one more for 6 annas reduces the price by one anna per dozen?

[ D. B. '39, '41, '46 ]

মনে কর,  $x$  সংখ্যক ডিমের মূল্য  $=6$  আনা,

$\therefore$  12টি , , ,  $=\frac{72}{x}$  আনা...(1)

একশে, যদি  $x+1$  সংখ্যক ডিমের মূল্য 6 আনা হয়, তবে

12টি , , , হইবে  $\frac{72}{x+1}$  আনা...(2)

$\therefore$  সর্তাহসারে  $\frac{72}{x} - \frac{72}{x+1} = 1$  [ $\because$  ২য় মূল্য ১ম মূল্য অপেক্ষা 1 আনা কম]

বা,  $\frac{72x+72-72x}{x(x+1)}=1$  বা,  $x^2+x=72$ , বা,  $x^2+x-72=0$ ,

বা,  $(x+9)(x-8)=0$ ,  $\therefore x=-9$  বা  $8$ .

$\therefore$  ডিমের সংখ্যা ঋণাত্মক  $(-9)$  হইতে পারে না,  $\therefore$  ডিমের সংখ্যা  $=8$ .

একগে (1) হইতে এক ডজন ডিমের মূল্য  $=78^2$  আ.  $=9$  আনা।

**উদা. 17.** Find a fraction which assumes twice or thrice its original value when 2 or 3 respectively is added to both its numerator and denominator. [ D. B. '49 ]

মনে কর, ভগ্নাংশটি  $\frac{x}{y}$ . একগে প্রথম সর্ত অন্তসারে  $\frac{x+2}{y+2}=\frac{2x}{y}$ ,

বা,  $xy+2y=2xy+4x$ , বা,  $2y-4x=xy$ ,

বা,  $\frac{2y-4x}{xy}=\frac{xy}{xy}=1$ , বা,  $\frac{2}{x}-\frac{4}{y}=1 \dots (1)$

আবার দ্বিতীয় সর্তান্তসারে পাই  $\frac{x+3}{y+3}=\frac{3x}{y}$ , বা,  $3y-9x=2xy$ ,

বা,  $\frac{3}{x}-\frac{9}{y}=2 \dots (2)$ . এখন  $(1) \times 3$  এবং  $(2) \times 2$  করিয়া পাই

$$\frac{6}{x}-\frac{12}{y}=3$$

$$\text{এবং } \frac{6}{x}-\frac{18}{y}=4$$

$\therefore$  (বিয়োগ)  $\frac{6}{y}=-1$ ,  $\therefore y=-6$ .

(1) হইতে  $y$ এর মান বসাইয়া পাই  $\frac{2}{x}+\frac{4}{6}=1$ , বা,  $\frac{2}{x}=\frac{1}{3}$ ,  $\therefore x=6$ .

$\therefore$  নির্ণেয় ভগ্নাংশ  $=\frac{6}{-6}$ .

[ **অষ্টব্য :** এখানে  $-\frac{6}{6}$  দ্বিই উত্তর রাখিতে হইবে,  $-\frac{1}{-1}$  বা,  $-1$  উত্তর দেওয়া চলিবে না, কারণ তাহা হইলে সর্তগুলি সম্ভব হইবে না। ]



উদা. 18. The product of two numbers is 24. If the sum of the squares of the two numbers be added to the sum of the numbers, the result is 62. What are the numbers ?

[ E. B. S. B. '53 ]

মনে কর, সংখ্যাভিন্ন  $x$  ও  $y$ .

$$\therefore xy = 24 \dots (1) \text{ এবং } x^2 + y^2 + x + y = 62 \dots (2).$$

$$(2) \text{ হইতে পাই } (x+y)^2 - 2xy + x + y = 62,$$

$$\text{বা, } (x+y)^2 - 2 \times 24 + (x+y) = 62,$$

$$\text{বা, } (x+y)^2 + (x+y) - 110 = 0,$$

$$\text{বা, } a^2 + a - 110 = 0 \text{ [ } x+y=a \text{ ধরিয়া ],}$$

$$\text{বা, } (a+11)(a-10) = 0, \therefore a = -11 \text{ বা } 10.$$

$$(i) \text{ যদি } a = -11 \text{ হয়, তবে } x+y = -11.$$

$$\therefore (x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy = (-11)^2 - 4 \times 24 = 25$$

$$\therefore x-y = \pm 5.$$

$$\text{একত্রে, } x+y = -11$$

$$\frac{x-y=5 \text{ [ } x-y=5 \text{ ধরিয়া ]}}{2x=-6, \therefore x=-3, \text{ সুতরাং } y=-8.}$$

$$\therefore \text{ নির্ণেয় সংখ্যাভিন্ন } = -3, -8.$$

$$\therefore \text{ নির্ণেয় সংখ্যাভিন্ন } = -3, -8.$$

$$[ x-y = -5 \text{ ধরিলেও ঐ দুইটি সংখ্যাই পাওয়া যায়। ]$$

$$(ii) \text{ আবার, যদি } a=10 \text{ হয়, তবে } x+y=10, \therefore y=10-x$$

$$\therefore xy=24, \therefore x(10-x)=24,$$

$$\text{বা, } x^2 - 10x + 24 = 0, \text{ বা, } (x-4)(x-6) = 0,$$

$$\therefore x=4 \text{ বা } 6; \text{ সুতরাং } y=6 \text{ বা } 4.$$

$$\therefore \text{ নির্ণেয় সংখ্যাভিন্ন } = 4, 6.$$

অতএব, (i) ও (ii) হইতে পাই,

$$\text{নির্ণেয় সংখ্যাভিন্ন } = -3 \text{ ও } -8, \text{ অথবা } 4 \text{ ও } 6.$$

[ (ii) এর সমাধানও (i) এর মত করা যায়। এখানে দুইটিতে দুই বাক্যের সমাধান দেখান হইল ]

## Exercise 11

1. Find a number such that its square added to its cube is 16 times the next number. [A. U. '16]

2. The sum of two numbers is 2 and the sum of their reciprocals is  $2\frac{1}{4}$ . Find the numbers. [C.U. '35]

3. Find two consecutive odd numbers whose product is 35.

4. Find two consecutive numbers such that the difference of their reciprocals is  $\frac{1}{110}$ .

5. What number when added to 30 will be less than its square by 12 ? [E. B. S. B. '50]

6. The sum of the squares of two consecutive odd integers is 290 ; find the integers.

7. A number is greater than its square root by 110. Find it.

8. The sum of the squares of two consecutive even numbers is 100 Find the numbers. [A. U. '24]

9 In a right-angled triangle the sum of the two sides containing the right angle is 23', and the hypotenuse is 17". Find the sides containing the right angle. [G. U. '51]

10. The hypotenuse of a right-angled triangle is 13 inches. Find the length of each of the remaining two sides if their sum is 17 inches. [C. U. '45]

11. A and B can do a piece of work in 72 mins., but B alone takes 1 hr. more than A to do it. In what time can each do it ?

12. Find the price of eggs per dozen when two more eggs for a shilling would reduce the price by one penny per dozen. [E. B. S. B. '51]

13. A man bought a certain number of goats for Rs.420 ; had he obtained one more for the same sum, the price of each would have been Re. 1 less. Find the number of goats bought.

14. A number is less than twice the product of its two digits by 8 ; if the digit in the tens' place is greater than the digit in the units' place by 1, find the number.

15. A man takes one hour less to ride 24 miles if he increases his speed by 2 miles per hour. Find his speed per hour.

16. The perpendicular from the centre of a circle to a chord is less than half the chord by 1'' ; if the radius be 5'', find the length of the chord.

17. The area of a rectangular field is 260 sq. ft. If its length be diminished by 5 ft. and breadth increased by 2 ft., it becomes a square field. Find its length and breadth.

18. A boatman can row 9 miles down the river but 3 miles up stream in a certain time. If the speed of the current be 2 miles per hour, find the speed of the boat in still water.

19. Find two consecutive positive numbers the sum of whose squares is 761. [G. U. '52]

20. The hypotenuse of a right-angled triangle is 25''. If the sum of the three sides be 56'', find the smallest side of the triangle.

21. The circumference of the fore-wheel of a carriage is 4 metres less than that of the hind-wheel and it makes 10 revolutions more than the latter in 240 metres. Find the circumference of each wheel.

22. A company of soldiers, when formed into a solid square, has 12 men fewer in the front than when formed into a hollow square 3 deep. Find the number of soldiers.

## Graph ( লেখ )

তোমরা পূর্ব শ্রেণীতে লেখ-অঙ্কন প্রণালী শিখিয়াছ।

54. লেখ সম্বন্ধে কতিপয় জ্ঞাতব্য বিষয় :—

1. একঘাত-বিশিষ্ট সমীকরণের অর্থাৎ সরল সমীকরণের (simple equation) লেখ সরল রেখা হয়।

2. কোন দ্বিঘাত সমীকরণকে যদি দুইটি সরল সমীকরণে বিশ্লেষণ করা যায়, তাহা হইলে প্রদত্ত সমীকরণটির লেখ দুইটি সরল রেখা হইবে।  
যথা, (i)  $x^2 - x - 6 = 0$ , বা  $(x-3)(x+2) = 0$  এর লেখ হইবে  $x-3=0$  এবং  $x+2=0$  এর লেখদ্বয়। (ii)  $x^2 = 9y^2$ , বা  $x^2 - 9y^2 = 0$ , বা  $(x+3y)(x-3y) = 0$  এর লেখ হইবে  $x+3y=0$  ও  $x-3y=0$  এই সমীকরণ দুইটির লেখদ্বয়।

3. দ্বিঘাত সমীকরণে  $x^2$  ও  $y^2$  এর সহগ সমান ও ধনাত্মক হইলে এবং  $xy$ -ঘটিত কোন পদ না থাকিলে সমীকরণটির লেখ একটি বৃত্ত (circle) হইবে। এইরূপ সমীকরণের আকার তিন প্রকার হইতে পারে। যথা,—

$$(i) \quad x^2 + y^2 = a^2 \quad (ii) \quad (x+b)^2 + (y+c)^2 = a^2$$

$$(iii) \quad x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$

$$\text{যথা :—} (i) \quad x^2 + y^2 = 16 \quad (ii) \quad (x+2)^2 + (y-3)^2 = 9$$

$$(iii) \quad x^2 + y^2 + 12x + 18y + 92 = 0.$$

4. দ্বিঘাত সমীকরণে  $x$  ও  $y$  এর মধ্যে একটি দ্বিঘাত ও অপরটি একঘাত হইলে এবং  $xy$ -যুক্ত কোন পদ না থাকিলে সমীকরণটির লেখ অধিবৃত্ত (Parabola) হইবে। এইরূপ সমীকরণের আকার  $y = mx^2$  বা  $mx = y^2$  হইয়া থাকে।  $y = ax^2 + bx + c$  বা  $x = ay^2 + by + c$  এই আকারের সমীকরণের লেখ অধিবৃত্ত হইবে, যদি  $a=0$  না হয়। যথা—

$$(i) \quad 4y = x^2, \quad (ii) \quad x = y^2, \quad (iii) \quad y = x^2 + 2x + 1.$$

5.  $4x+2$ ,  $x^2$ ,  $x^2-5x+6$  প্রভৃতি অপেক্ষক (function) এর লেখ যাহা হইবে যথাক্রমে  $y=4x+2$ ,  $y=x^2$  এবং  $y=x^2-5x+6$  সমীকরণের লেখও তাহাই হইবে। অতএব, এইরূপ কোন অপেক্ষকের লেখ আঁকিতে হইলে  $y=$  ঐ অপেক্ষকটি লিখিয়া ঐ সমীকরণের লেখ আঁকিবে।

6. কোন দ্বিঘাত সমীকরণের  $x^2$  ও  $y^2$  এর সহগ অসমান ও ধনাত্মক হইলে, উহার লেখ উপবৃত্ত (Ellipse) হইবে। এই সমীকরণের সাধারণ আকার হয়  $ax^2+by^2=c^2$  যথা,  $4x^2+9y^2=25$

7. কোন দ্বিঘাত সমীকরণের  $x^2$  ও  $y^2$  এর সহগ বিপরীত চিহ্নযুক্ত (একটি ধনাত্মক, অন্যটি ঋণাত্মক) হইলে, উহার লেখ পরাবৃত্ত (Hyperbola) হইবে। উহার সাধারণ আকার হয়  $ax^2-by^2=c^2$ ।

যথা,  $9x^2-25y^2=225$ ।

8.  $xy=a$ , বা  $xy+ax+by=c$  এইরূপ আকারের সমীকরণের লেখ একটি বিশেষ পরাবৃত্ত, ইহাকে সম-পরাবৃত্ত (Rectangular Hyperbola) বলে। যথা,  $xy=8$ । মূলবিন্দু ইহার কেন্দ্র এবং অক্ষদ্বয় ইহার মূল অক্ষদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডক।

9. লেখ অঙ্কিত করিয়া কোন দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ নির্ণয় (অর্থাৎ সমাধান) করিতে হইলে, উহাকে দুইটি সমীকরণে প্রকাশ করিয়া প্রত্যেকটির লেখ আঁকিতে হইবে। ঐ লেখ দুইটির ছেদবিন্দুদ্বয়েব ভূজদ্বয়ই দুইটি বীজ হইবে। যথা,  $x^2-7x+12=0$  এর সমাধান করিবার জন্ত নিম্নের যে কোন উপায় অবলম্বন করা যায়। যথা, (i)  $y=x^2-7x+12$ ,  $y=0$  ধরা যান্ন ; অথবা (ii) প্রদত্ত সমীকরণকে  $x^2=7x-12$  লিখিয়া  $y=x^2$  ও  $y=7x-12$  ধরা যায়। এখন (i) বা (ii) এর সমীকরণ দুইটির লেখ আঁকিলে, লেখদ্বয়ের ছেদবিন্দু দুইটির ভূজ দুইটিই প্রদত্ত সমীকরণের বীজ অর্থাৎ  $x$  এর মান হইবে।

10. লেখ অঙ্কনের সময় অক্ষদ্বয়, মূলবিন্দু এবং দৈর্ঘ্য একক কি ধরিয়াছ তাহা লিখিতে হয়। প্রদত্ত সমাধানগুলিতে সর্বত্র এগুলি লেখা না থাকিলেও ভোমরা উত্তর করিবার সময় এগুলি লিখিতে যেন ভুলিও না।

55. বিবিধ লেখ অঙ্কন ও লেখ সাহায্যে সমীকরণ সমাধান

উদাহরণমালা 14

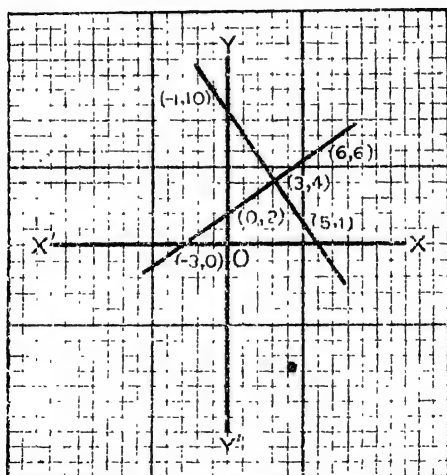
উদা. 1. Solve graphically  $3x = 17 - 2y$  and  $3y = 2x + 6$ .

[ A. U. '27 ]

$3x = 17 - 2y \dots (1)$ , বা,  $2y = 17 - 3x$ ,  $\therefore y = \frac{17-3x}{2}$ , ইহা হইতে

পাই  $\begin{array}{c|c|c|c} x & -1 & 3 & 5 \\ \hline y & 10 & 4 & 1 \end{array}$ ;

$3y = 2x + 6 \dots (2)$ , বা,  $y = \frac{2x+6}{3}$ ; ইহা হইতে  $\begin{array}{c|c|c|c} x & 0 & -3 & 6 \\ \hline y & 2 & 0 & 6 \end{array}$



( চিত্র নং ১ )

ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহকে দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া লেখ দুইটি আঁকা হইল। উহারা যে বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে তাহার স্থানাঙ্ক (3, 4) দেখা গেল।

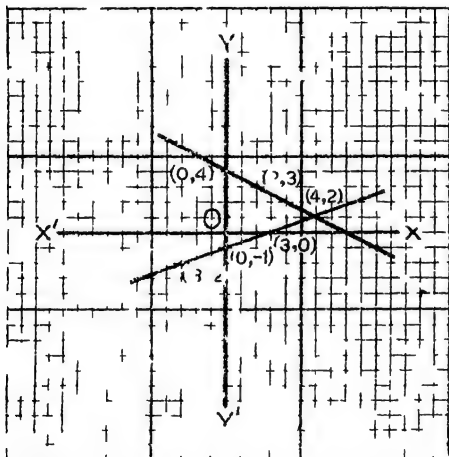
$\therefore$  নির্ণেয় সমাধান  $x=3, y=4$ .

উদা. 2. Solve graphically  $\frac{8-x}{2} = \frac{x-3}{3}$ .

মনে কর,  $y = \frac{8-x}{2}$ , হলে  $y = \frac{x-3}{3}$  হলে।

এখন  $y = \frac{8-x}{2}$  হলে  $\begin{array}{c|c|c|c} x & 0 & 2 & 4 \\ \hline y & 4 & 3 & 2 \end{array}$  এবং  $y = \frac{x-3}{3}$  হলে  $\begin{array}{c|c|c|c} x & 0 & 3 & 6 \\ \hline y & -1 & 0 & 1 \end{array}$

ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া সমীকরণ দুইটির লেখ আঁকা হইল। উহারা যে বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে তাহার স্থানাঙ্ক (6, 1) [ চিত্র নং ২ দেখ ]  $\therefore$  নির্ণেয় সমাধান  $x=6$



( চিত্র নং ২ )

উদা. 3. Solve graphically  $x-3=2$

এখানে  $x-3$  এবং 2 এই রাশিদ্বয়ের লেখ দুইটিই ছেদবিন্দুর ভূজটি নির্ণেয় বীজ হইবে।

$y = x-3$  এবং  $y = 2$  এই সমীকরণদ্বয়ের লেখ দুইটিই ঐ রাশিদ্বয়ের লেখ হইবে।

$$y = x - 3 \text{ হইতে পাই } \begin{array}{c|c|c|c} x & 2 & 3 & 5 \\ y & -1 & 0 & 2 \end{array}$$

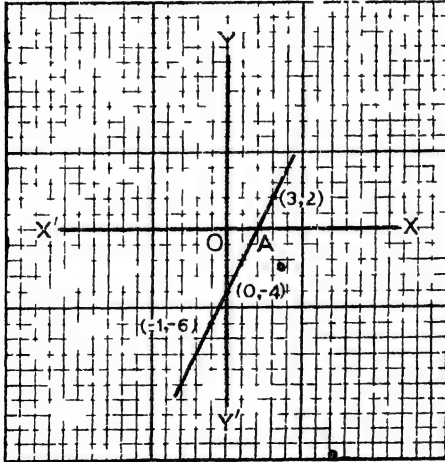
$$\text{এবং } y = 2 \quad \begin{array}{c|c|c|c} x & 0 & 1 & -3 \\ y & 2 & 2 & 2 \end{array}$$

ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া লেখ দুইটি অঙ্কিত করা হইল। এখানে দেখা যায় লেখ দুইটির ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক (5, 2), সুতরাং ঐ বিন্দুর ভূজ = 5.

অতএব, নির্ণেয় সমাধান  $x = 5$ .

উদা. 4. Draw the graph of  $y - 2x + 4 = 0$  and find from it the solution of the equation  $2x - 4 = 0$ . [D. B. 1929]

$$y - 2x + 4 = 0, \therefore y = 2x - 4 \dots (A); \text{ ইহা হইতে } \begin{array}{c|c|c|c} x & 0 & -1 & 3 \\ y & -4 & -6 & 2 \end{array}$$



(চিত্র নং ৩)

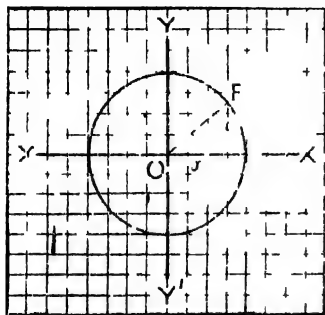
লেখ কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া লেখটি আঁকা হইল [চিত্র নং ৩]। এখন ঐ লেখ হইতে  $2x - 4 = 0$  সমীকরণটি সমাধান করিতে হইলে লেখটি  $x$ -অক্ষকে যে A বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে, তাহার



ভূজ ( বা  $x$ -axis বরাবর মাপ ) দেখিতে হইবে। কারণ, সেখানে  $y=0$  সুতরাং  $0=2x-4$  হইবে, সমীকরণ-(A) দেখ।

এখানে উক্ত দৈর্ঘ্য  $=2$  একক।  $\therefore$  নির্ণয় বীজ  $x=2$ ।

উদা. 5. Draw the graph of  $x^2+y^2=16$ .



[ চিত্র নং ৪ ]

প্রদত্ত সমীকরণকে

$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{16} = 4$  এই আকারে লেখা যায়। মনে কর,  $XOX'$  ও  $YOY'$  অক্ষদ্বয় পরস্পর  $O$  মূলবিন্দুতে লম্বভাবে ছেদ করিয়াছে। মনে কর,  $P$  এমন একটি বিন্দু যাহার স্থানাঙ্ক  $(x, y)$  এখন মূলবিন্দু  $O$  হইতে  $P$ এর দূরত্ব  $OP$ , সুতরাং  $OP^2 = x^2 + y^2$ ,

$$\therefore OP = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$\therefore$  এখানে  $\sqrt{x^2+y^2} = 4$  ( ধ্রুবক ),

$\therefore$  বুঝা গেল যে, মূলবিন্দু  $O$  হইতে  $P$ -এর দূরত্ব সর্বদা ৪ এককের সমান। অতএব,  $P$ -এর সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত।  $\therefore$   $O$ কে কেন্দ্র করিয়া এবং ৪ একক ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তই উদ্দিষ্ট লেখ হইবে। এখানে লেখ কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া লেখটি অঙ্কিত করা হইল।

• [অন্য প্রণালী।  $\therefore x^2+y^2=16$ ,  $\therefore y = \pm \sqrt{16-x^2}$ , এক্ষণে এই সমীকরণ হইতে লেখস্থিত বিভিন্ন বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক নির্ণয় করিয়া এবং ঐ বিন্দুগুলিকে ছক কাগজে স্থাপন করিয়া লেখটি অঙ্কিত করা যায়।]

উদা. 6. Draw the graphs of  $x^2+y^2=16$  and  $x+y=2$ , and measure the length of the chord of intersection, [ C. U. '13 ]

[ Hints : প্রথম সমীকরণের লেখ একটি বৃত্ত ( উপরের উদা. 5 দেখ )।  $x+y=2$ এর লেখ একটি সরল রেখা।  $(1, 1)$ ,  $(5, -3)$ ,  $(-4, 6)$  বিন্দুগুলি দিয়া অঙ্কিত সরল রেখাই উহার লেখ। লেখদ্বয় অঙ্কিত কর। এখন লেখ দুইটি পরস্পর যেন  $A$  ও  $B$  বিন্দুতে ছেদ করিল।  $O$ কে কেন্দ্র করিয়া

AB ব্যাসার্ধ লইয়া OX হইতে OP কাটিয়া লও। এখন OP দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। এখানে নির্ণয় দৈর্ঘ্য = 7.5 একক।]

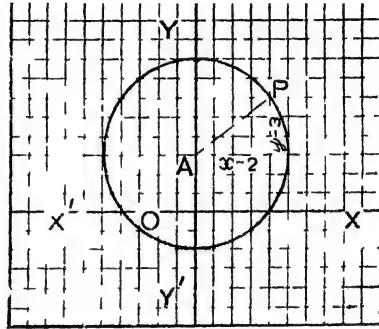
উদা। 7. Draw the graph of  $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$ .

প্রদত্ত সমীকরণটি হইতে পাই  $\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{25} = 5$ .

প্রথমে (2, 3) স্থানাঙ্কবিশিষ্ট A বিন্দু স্থাপন কর। মনে কর, P উদ্দিষ্ট লেখর উপর একটি বিন্দু এবং উহার স্থানাঙ্ক (x, y).  $\therefore AP^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2$ ,  $\therefore AP = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = 5$  (ধ্রুবক)। অতএব বুঝা গেল যে,

P বিন্দু ঐ নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সর্বদা সমদূরবর্তী অর্থাৎ 5 দৈর্ঘ্য একক দূরবর্তী।

$\therefore$  A (2, 3) বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া 5 একক ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তই উদ্দিষ্ট লেখ। এখানে লেখ কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহকে দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া লেখটি আঁকা হইল।



[ চিত্র নং ৫ ]

[ জটিল্য : এখানে লক্ষ্য কর যে, প্রদত্ত সমীকরণে  $(x-2)$ ,  $(y-3)$  আছে বলিয়া A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (2, 3) অর্থাৎ -2 ও -3 এর বিপরীত চিহ্নযুক্ত ধরা হইল। এইরূপে যদি সমীকরণ  $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 36$  হইত, তবে A বিন্দুর স্থানাঙ্ক হইত (-3, 4) এবং ইহাকে কেন্দ্র করিয়া 6 দৈর্ঘ্য একক ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তই নির্ণেয় লেখ হইত। ]

উদা। 8. Draw the graph of  $x^2 + y^2 + 12x + 18y + 92 = 0$   

$$x^2 + y^2 + 12x + 18y + 92 = 0$$

$$\text{বা, } (x^2 + 12x + 36) + (y^2 + 18y + 81) - 25 = 0,$$

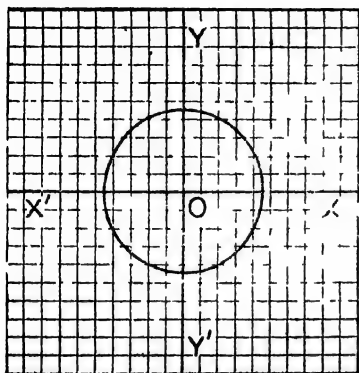
$$\text{বা, } (x+6)^2 + (y+9)^2 = 25 = 5^2.$$

$\therefore$  সমীকরণটির লেখ একটি বৃত্ত যাহার কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (-6, -9) এবং ব্যাসার্ধ = 5 দৈর্ঘ্য একক। লেখ কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর সমন দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া বৃত্তটি আঁক।

উদা. 9. Draw the graph of  $x^2 + y^2 = 21$ .

$$x^2 + y^2 = 21, \text{ বা, } \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{21}.$$

অতএব সমীকরণটির লেখ একটি বৃত্ত, যাহার কেন্দ্র মূলবিন্দু O এবং ব্যাসার্ধ =  $\sqrt{21}$  দৈর্ঘ্য একক।

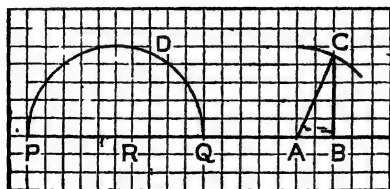


[ চিত্র নং ৬ ]

এখন  $\sqrt{21}$ এব মান নির্ণয় করিয়া লেখ আঁকিতে হইবে। ইহা দুইভাবে করা যায়। যথা—  
(i)  $21 = 25 - 4 = 5^2 - 2^2$ ,  
সুতরাং একটি সমকোণী ত্রিভুজ আঁক যাহার অতিভুজ  $AC = 5$  একক এবং ভূমি  $AB = 2$  একক, উহার  $BC$  বাহুর মাপই  $\sqrt{21}$  হইবে।

$$\text{কারণ, } BC^2 = AC^2 - AB^2 = 5^2 - 2^2 = 21.$$

(ii)  $21 = 7 \times 3$ , 7 ও 3এর যোগফল 10 একক দীর্ঘ PQ রেখা লও। উহার  $PR = 7$  দৈর্ঘ্য একক এবং  $RQ = 3$  দৈর্ঘ্য একক কর। PQকে ব্যাস করিয়া অর্ধবৃত্ত আঁক। PQএর উপর RD লম্ব টান, উহা যেন অর্ধবৃত্তকে D বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন  $RD = \sqrt{21}$  হইল। এক্ষণে মূলবিন্দু Oকে কেন্দ্র



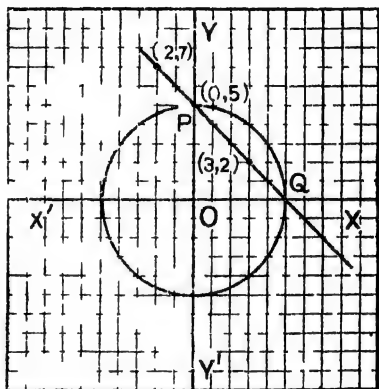
[ চিত্র নং ৬ক ]

করিয়া BC বা RDএর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। উহাই উদ্দিষ্ট লেখ।

উদা. 10. Draw the graphs of  $x^2 + y^2 = 25$  and  $\frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1$ , and find the co-ordinates of their points of intersection graphically. [C. U. '39, Sup., '32]

$$x^2 + y^2 = 25, \text{ বা, } \sqrt{x^2 + y^2} = 5.$$

$\sqrt{x^2 + y^2}$  দ্বারা বুঝায় মূলবিন্দু O হইতে  $(x, y)$  স্থানাঙ্কবিশিষ্ট P বিন্দুর দূরত্ব। অতএব,  $\sqrt{x^2 + y^2} = 5$  (ধ্রুবক) বলিয়া P বিন্দু O হইতে সমদূরবর্তী। স্তত্রাং উহার সঞ্চারণথ একটি বৃত্ত। এখন মনে কর, XOX' ও YOY' অক্ষদ্বয় পরস্পর লম্বভাবে O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। লেখ কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাতকে দৈর্ঘ্য একক ধরা হইল।



Oকে কেন্দ্র করিয়া 5 একক

[চিত্র নং ৭]

দীর্ঘ ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁকা হইল। • উহাই প্রথম সমীকরণের লেখ হইল।

$$\text{আবার, } \frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1, \text{ বা } x + y = 5, \text{ ইহা হইতে } \begin{array}{c|c|c} x & 3 & -2 & 0 \\ y & 2 & 7 & 5 \end{array};$$

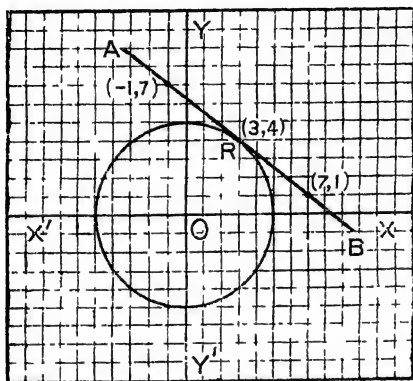
(3, 2), (-2, 7), (0, 5) বিন্দুগুলি দিয়া ক্ষতিত সরলরেখাই দ্বিতীয় সমীকরণের লেখ হইল। • লেখদ্বয় পরস্পর P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিল। লেখ হইতে দেখা যায় Pএর স্থানাঙ্ক (0, 5) এবং Qএর স্থানাঙ্ক (5, 0)।

উদা. 11. Draw the graph of  $x^2 + y^2 = 25$  and show that  $3x + 4y = 25$  touches it at (3, 4). [C. U. '11; E. B. S. B. '50]

প্রথম সমীকরণের লেখ একটি বৃত্ত, উদা. 5এর মত উহা আঁক।

$$3x + 4y = 25, \text{ ইহা হইতে } \frac{x}{y} \left| \begin{array}{c|c} 3 & 7 \\ 4 & 1 \end{array} \right| = \frac{-1}{7}; (3, 4), (7, 1), (-1, 7)$$

বিন্দুগুলি দিয়া অঙ্কিত এবং দুই দিকে বিস্তৃত AB সরল রেখাটি এই দ্বিতীয়



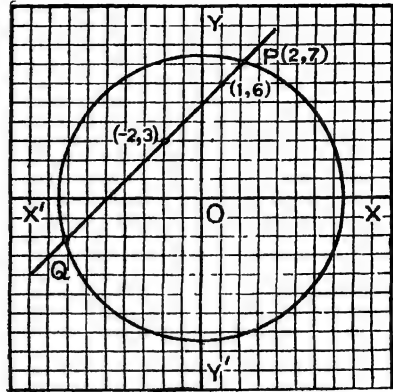
[ চিত্র নং ৮ ]

সমীকরণের লেখ। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর সমান দৈর্ঘ্য একক লইয়া লেখ দুইটি আঁক। হইল। এখানে সরল রেখাটি বৃত্তটির সহিত কেবলমাত্র R বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে, অত্ৰ কোন বিন্দুতে বৃত্তকে ছেদ করে নাই। সুতরাং উহা বৃত্তকে R বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে এবং ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক (3, 4),

[ জ্যামিতিক প্রমাণ :  $\therefore$  দুইটি সমীকরণই (3, 4) স্থানাঙ্ক দ্বারা সিদ্ধ হয়,  $\therefore$  উভয় লেখই (3, 4) বিন্দুতে মিলিয়াছে। এখন RO হইতে  $RC = 3$  দৈর্ঘ্য একক এবং RA হইতে  $RD = 4$  দৈর্ঘ্য একক কাটিয়া লইলাম। মাপিয়া দেখিলাম CDর দৈর্ঘ্য 5 একক হইয়াছে।  $\therefore RC^2 + RD^2 = 3^2 + 4^2 = 25 = 5^2 = CD^2$ ,  $\therefore \angle R$  সমকোণ। অতএব AB রেখা বৃত্তের OR ব্যাসার্ধের R বিন্দুতে লম্ব বলিয়া, উহা বৃত্তকে R বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে। ]

উদা. 12. Solve graphically the simultaneous equations  
(i)  $x^2 + y^2 = 53$  and (ii)  $y - x = 5$ .

$x^2 + y^2 = 53$  সমীকরণের  
লেখ একটি বৃত্ত। সমীকরণটি  
হইতে পাই  $y^2 = 53 - x^2$ ,  
 $\therefore y = \pm \sqrt{53 - x^2}$ , এখানে  
পরীক্ষা দ্বারা দেখা যায় যে,  
 $53 = 2^2 + 7^2$ । অতএব  $x = 2$ ,  
 $y = 7$  দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ  
হয়। এক্ষেত্রে ছক কাগজে  
(2, 7) স্থানাঙ্কবিশিষ্ট P বিন্দু  
স্থাপন কর। P বিন্দুটি লেখটির  
উপরিস্থিত একটি বিন্দু পাওয়া  
গেল। এক্ষেত্রে, মূলবিন্দু Oকে  
কেন্দ্র করিয়া এবং OP ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তটি প্রথম সমীকরণের লেখ  
হইল।



[চিত্র নং ৯]

(ii)  $y - x = 5$ , বা  $y = 5 + x$ , ইহা হইতে পাই

$x$	-2	1	2	...
$y$	3	6	7	...

ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া এই  
লেখটি অঙ্কিত করা হইল। লেখ দুইটি P ও Q বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল।  
P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (2, 7) এবং Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক (-2, -3)।

$\therefore$  নির্ণেয় সমাধান  $x = 2$ ,  $y = 7$ , অথবা  $x = -2$ ,  $y = -3$ ।

উদা. 13. Draw the graph of  $y = x^2$  between the limits  
 $x = 3$  and  $x = -3$ , and hence find the value of  $\sqrt{5}$  to the first  
decimal place.

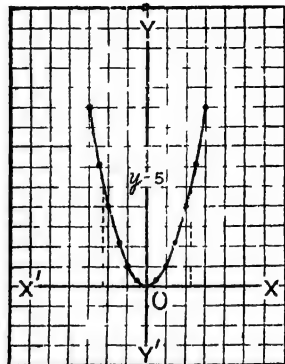
[C. U. '29, '38]

$y = x^2$  সমীকরণটির লেখ একটি অধিবৃত্ত হইবে। উহা হইতে পাই

$x$	0	$\pm 1$	$\pm 2$	$\pm 3$	$\pm 5$	$\pm 1.5$	$\pm 2.5$	...
$y$	0	1	4	9	25	2.25	6.25	...

এখানে  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(2, 4)$   $(-2, 4)$  প্রভৃতি বিন্দুগুলি লেখটির উপরে থাকিবে। মনে কর,  $XOX'$  ও  $YOY'$  অক্ষদ্বয়  $O$  মূলবিন্দুতে পরস্পর

লম্বভাবে ছেদ করিয়াছে। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর সমান দৈর্ঘ্য একক লইয়া উপরের বিন্দুগুলি স্থাপন কর। তারপর উহাদিগকে হস্তাক্ষিত সম্তত রেখা দ্বারা যোগ কর। ইহাতে যে অধিবৃত্তটি উৎপন্ন হইল তাহাই উদ্দিষ্ট লেখ। এখানে লেখটি  $x=3$  ও  $x=-3$  এই সীমার মধ্যে অঙ্কিত হইয়াছে।



এখন এই লেখ হইতে  $\sqrt{5}$  এর মান নির্ণয় করিতে হইবে। লেখটির উপরিস্থিত

[ চিত্র নং ১০ ]

প্রত্যেক বিন্দুর স্থানাক হইতে দেখা যাইতেছে যে,  $x$ -এর মান  $y$ -এর মানের বর্গমূল। সুতরাং  $y$ -এর মান ৫ হইলে তখন  $x$ -এর মান বাহা হইবে তাহাই  $\sqrt{5}$ -এর মান। লেখটিতে দেখা যায় যে,  $y=5$  হইলে  $x$ -এর মান হয়  $\pm 2.2$ । অতএব,  $\sqrt{5} = \pm 2.2$  (প্রায়)।

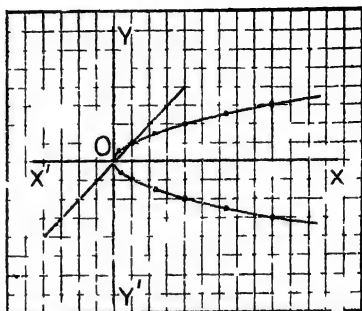
[ সঙ্ক্ষেপ : (১)  $y$ -এর প্রত্যেক মানের জন্য  $x$ -এর মান দুইটি হইতেছে, ঐ মান দুইটি সমান, কিন্তু পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত। সুতরাং লেখটির  $y$ -axis এর দুই দিকে প্রতিসাম্য রহিয়াছে। (২)  $x$ -এব মান ধনাত্মক, বা ঋণাত্মক যাহাই হউক না কেন,  $y$ -এর মান সর্বদাই ধনাত্মক, সুতরাং কোটিগুলি (ordinates) সবই  $x$ -axis-এর উপরের দিকে অবাস্ত। অতএব, লেখটির কোন অংশ  $x$ -axis-এর নীচের দিকে থাকিতে পারে না। (৩) লেখটি মূলবিন্দুগামী। (৪) প্রশ্নে কোনরূপ সীমা নির্দেশ করা না থাকিলে লেখটি উপরের দিকে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত হইবে। সুতরাং অঙ্কিত চিত্রে শেষ বিন্দুদ্বয়ের পর লেখটি সামান্ত একটু করিয়া বাড়াইয়া দিবে। এখানে অঙ্কিত লেখটিতে এরূপে বর্ধিত করা হয় নাই, কারণ এখানে  $x=3$  এবং  $x=-3$  এই সীমা নির্দেশ করা আছে। (৫) অধিবৃত্ত আঁকিবার সময় অন্ততঃ ছয়টি বিন্দু সংস্থাপন করা উচিত। সমীকরণে যে অক্ষরটির দ্বিঘাত আছে, তাহার মান প্রথমে ধরিয়া অপরটির মান তাহা হইতে নির্ণয় করিবে। স্থাপিত বিন্দুগুলির পাশে স্থানাক লিখিবে। ]

উদা. 14. Draw the graphs of  $y^2 = x$  and  $y = x$ , and find the co-ordinates of their points of intersection, [G. U. '50]

(1)  $y^2 = x$  হইতে পাই  $\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} x & 0 & 1 & 4 & 9 & 25 & 2\cdot25 & \dots \\ y & 0 & \pm 1 & \pm 2 & \pm 3 & \pm 5 & \pm 1\cdot5 & \dots \end{array}$

(2)  $y = x$  হইতে পাই  $\begin{array}{c|c|c|c|c} x & 0 & 2 & -3 & \dots \\ y & 0 & 2 & -3 & \dots \end{array}$

ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের একটি বাহুর সমান দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া লেখ দুইটি অঙ্কিত করা হইল। প্রথম লেখটি একটি অধিবৃত্ত, দ্বিতীয়টি একটি সরল-রেখা। উহারা যে বিন্দু দুইটিতে ছেদ করিয়াছে তাহাদের স্থানাঙ্ক (0, 0) এবং (1, 1)



[ চিত্র নং ১১ ]

### লেখ সাহায্যে সমীকরণ সমাধান

উদা. 15. Draw the graph of  $y = 2x - \frac{x^2}{4}$  and obtain the roots of the equation  $2x - \frac{x^2}{4} = 0$  from the graph.

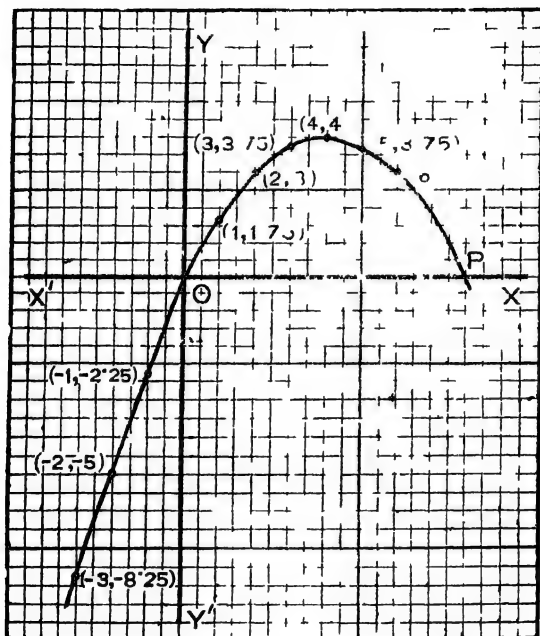
প্রদত্ত সমীকরণ  $y = 2x - \frac{x^2}{4}$  হইতে পাই,

$x$	0	1	1	2	-2	8	-8	4	5	6
$2x$	0	2	-2	4	-4	6	-6	8	10	12
$-\frac{x^2}{4}$	0	-25	-25	-1	-1	-2\cdot25	-2\cdot25	-4	-6\cdot25	-9
$y$	0	1\cdot75	-2\cdot25	8	-5	8\cdot75	-8\cdot25	4	8\cdot75	8

এক্ষেপে ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের দুইটি বাহুর সমান দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া লেখটি অঙ্কিত করা হইল। [ চিত্র নং ১২ দেখ ]



প্রদত্ত সমীকরণটিতে  $y$  এর স্থানে 0 বসাইয়া পাই  $2x - \frac{x^2}{4} = 0$ , সুতরাং  
 লেখ হইতে  $2x - \frac{x^2}{4} = 0$ , এই সমীকরণের বীজ নির্ণয় করিতে হইলে লেখটি  
 $x$ -অক্ষকে যে দুই বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে, তাহাদের ভূজ দুইটি দেখিতে হইবে।  
 এখানে লেখটি O এবং P বিন্দুতে  $x$ -অক্ষকে ছেদ করিয়াছে। O বিন্দুর ভূজ  
 0 এবং P বিন্দুর ভূজ 8.  $\therefore$  নির্ণেয় বীজ দুইটি  $x=0$  এবং  $x=8$ .



[ চিত্র নং ১২ ]

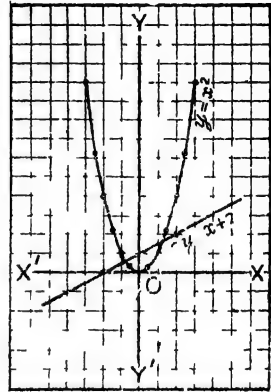
উদা. 16. Give graphical solution of  $2x^2 - x - 2 = 0$ . [A. U. '15]

$$2x^2 - x - 2 = 0, \text{ বা, } 2x^2 = x + 2, \therefore x^2 = \frac{x+2}{2}.$$

$$\text{মনে কর, } x^2 = y \dots (1); \text{ সুতরাং } y = \frac{x+2}{2} \dots (2)$$

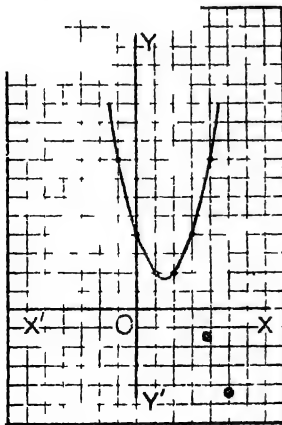
এক্ষে (1) ও (2) সমীকরণ দুইটির লেখদ্বয় অঙ্কিত কর। প্রথম লেখটি অধিবৃত্ত (উদা. 13 দেখ), দ্বিতীয় লেখটি একটি সরল রেখা যাহা (0, 1), (2, 2), (-2, 0) প্রভৃতি বিন্দু দিয়া গিয়াছে। এখানে লেখ দুইটি যে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে তাহাদের ভূজদ্বয় 1.3, -8 :  
 $\therefore$  নির্ণয় সমাধান  $x=1.3$  ও  $-8$ .

[ জটব্য : এখানে  $y=2x^2-x-2$  এবং  $y=0$  লিখিয়া দুইটি লেখ আঁকিলেও হইত।  $y=0$  এর লেখ  $x$ -axis জানাই আছে। সুতরাং  $y=2x^2-x-2$  এর লেখটি  $x$ -axisকে যে-বিন্দু দুইটিতে ছেদ করিবে তাহাদের ভূজ হইবে 1.3, -8 ]



[ চিত্র নং ১৩ ]

উদা. 17. Prove graphically that the expression  $x^2 - 3x + 4$  is positive for all real values of  $x$ . [ C. U. '48 ]



[ চিত্র নং ১৪ ]

এখানে  $x^2 - 3x + 4$  একটি অপেক্ষক। মনে কর, ইহা  $y$ -এর সমান।  $\therefore y = x^2 - 3x + 4$ , ইহার লেখ একটি অধিবৃত্ত।

$x$	0	1	-1	2	3	4	...
$y$	4	2	8	2	4	8	...

ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরিয়া ঐ বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল এবং সমস্ত রেখা দ্বারা বিন্দুগুলি যোগ করিয়া লেখটি আঁকা হইল।

লেখটি হইতে দেখা যাইতেছে যে, উহার কোন অংশ  $x$ -অক্ষের নীচে আসে নাই, সুতরাং  $x$ -এর মান (যে কোন বাস্তব মান ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) যাহাই,

হউক না কেন,  $y$ -এর মান সর্বদা ধনাত্মক হইবে। অতএব, প্রমাণিত হইল যে  $x^2 - 3x + 4$  এর মান সর্বদা ধনাত্মক।

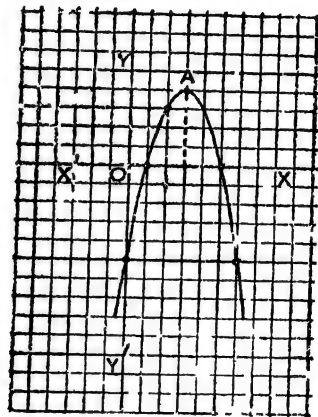
উদা. 18. Find graphically the maximum value of  $6x - x^2 - 5$ , and the value of  $x$  that gives the maximum value. [ M. U. '28 ; D. B. '31 ]

মনে কর, প্রদত্ত অপেক্ষকটি  $y$ .  $\therefore y = 6x - x^2 - 5$ , ইহার লেখ একটি অধিবৃত্ত হইবে। ইহা হইতে পাই

$x$	0	1	2	3	5	6	...
$y$	-5	0	3	4	0	-5	...

ছক-কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর সমান দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল এবং সমস্ত রেখা দ্বারা বিন্দুগুলি যোগ করিয়া অধিবৃত্তটি আঁকা হইল।

এখন  $y$ -এর চরম মানই প্রদত্ত অপেক্ষক  $6x - x^2 - 5$  এর চরম মান হইবে। লেখটিতে দেখা যায় যে, উহার কোন অংশ A বিন্দুর উপরে উঠে নাই, এবং ঐ A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (3, 4) বলিয়া উহার কোটি=4.



[ চিত্র নং ১৫ ]

অতএব  $6x - x^2 - 5$  এর বৃহত্তম মান 4 হইল। তখন নির্ণেয়  $x$ -এর মান 3.

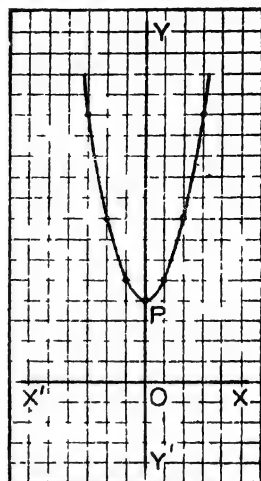
উদা. 19. Draw the graph of  $x^2 + 2x + 5$  from  $x = -4$  to  $x = 2$ . Find from the graph the minimum value of the function and the value of  $x$  that gives the minimum value. [D. B. 1932]

মনে কর, প্রদত্ত অপেক্ষকটি  $y$ , সুতরাং  $y = x^2 + 2x + 5$ , ইহার লেখ একটি অধিবৃত্ত হইবে। এই সমীকরণ হইতে পাই

$x$	0	1	-1	2	-2	-3	-4	..
$y$	5	8	4	13	5	8	13	...

ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরিয়া বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল। বিন্দুগুলিকে হস্তাক্ষিত সমান্তর রেখা দ্বারা যোগ করিলে যে অধিবৃত্ত হইল উহাই উদ্দিষ্ট লেখ।

$y$ -এর অবম বা লঘিষ্ঠ মানই প্রদত্ত অপেক্ষকটির অবম মান হইবে। লেখটিতে দেখা যায় যে, উহার কোন অংশ  $P$  বিন্দুর নীচে নাই।  $P$  বিন্দুর স্থানাঙ্ক  $(-1, 4)$  বলিয়া উহার কোটি 4ই  $y$ -এর অর্থাৎ প্রদত্ত অপেক্ষকটির লঘিষ্ঠ মান হইল এবং তখন  $x$ -এর মান  $-1$  হইল।



[ চিত্র নং ১৬ ]

উদা. 20. Trace the changes in sign and magnitude of the expression  $x^2 - 3x + 2$  as  $x$  increases from  $-\infty$  to  $+\infty$ .

[ C. U. '49 ]

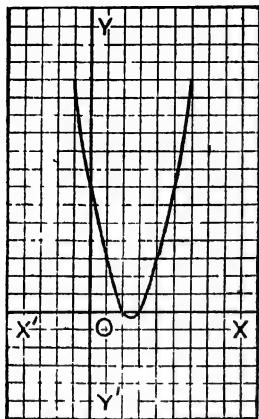
$x^2 - 3x + 2$  এর লেখ এবং  $y = x^2 - 3x + 2$  এর লেখ একই এবং একটি অধিবৃত্ত। এই সমীকরণটি হইতে পাই

$x$	0	1	2	3	4	-1	-2	...
$y$	2	0	0	2	6	6	12	...

মনে কর,  $XOX'$  এবং  $YOY'$  অক্ষদ্বয়  $O$  মূলবিন্দুতে পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করিয়াছে। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরিয়া ঐ বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল। হস্তাক্ষিত সমান্তর রেখা দ্বারা বিন্দুগুলি যোগ করিয়া যে অধিবৃত্ত হইল উহাই উদ্দিষ্ট লেখ।

লেখটি হইতে দেখা যাইতেছে যে উহা উপরের দিকে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত হইতে পারে এবং উহার যে অংশটুকু  $x$ -অক্ষের নীচে আছে তাহা  $x=1$  হইতে

$x=2$  এর সীমার মধ্যে অবস্থিত। অতএব,  $x$ -এর মান 1 হইতে 2 এর



[ চিত্র নং ১৭ ]

মধ্যে হইলে  $y$ -এর মান অর্থাৎ প্রদত্ত অপেক্ষকটির মান ঋণাত্মক হইবে। ঐ সীমার বাহিরে  $x$ -এর মান ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যতই হউক না কেন,  $y$ -এর মান আর ঋণাত্মক হইবে না।  $x$ -এর ধনাত্মক ও ঋণাত্মক মান অসীম পর্যন্ত ক্রমশঃ যতই বর্ধিত হইবে, তৎসঙ্গে  $y$ -এর মানও ক্রমশঃ অসীম পর্যন্ত বর্ধিত হইবে ও কেবল ধনাত্মক হইবে। এই বুদ্ধির শেষ নাই বলিয়া লেখটির উভয় শাখাই  $x$ -অক্ষের উপরের দিকে অসীম পর্যন্ত

বিস্তৃত হইবে।

উদা. 21. Draw the graphs of  $y=x^2$  and  $2y-5x+3=0$ , and hence obtain the solution of the equation  $2x^2-5x+3=0$ .

[ W. B. S. F. '52 ; D. B '29 ]

[ Hints : এখানে  $y=x^2 \dots (1)$  এবং  $2y-5x+3=0$ ,

বা,  $y=\frac{5x-3}{2} \dots (2)$ . প্রথমে এই সমীকরণ দুইটির লেখ অঙ্কিত কর।

এখন দেখ,  $2x^2-5x+3=0$ , বা  $2x^2=5x-3$ ,  $\therefore x^2=\frac{5x-3}{2}$

$\therefore (1)$  ও  $(2)$  সমীকরণদ্বয়ের লেখদ্বয় পরস্পর যে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিবে তাহাদের ভূজ দুইটিই  $2x^2-5x+3=0$  সমীকরণটির বীজ হইবে। এখানে  $x=1$  বা  $1.5$  ]

উদা. 22. Using the graphs of  $y=x^2$  and  $y=\frac{5x+2}{3}$  solve the equation  $3x^2-5x-2=0$ . [C. U. '48]

$y=x^2$  এই সমীকরণের লেখ একটি অধিবৃত্ত। উদা. 13-এর মত এই লেখটি আঁক।

$$y=\frac{5x+2}{3}, \text{ ইহা হইতে পাই } \begin{array}{c|c|c|c|c} x & -1 & 2 & -4 & \dots \\ \hline y & -1 & 4 & -6 & \dots \end{array}$$

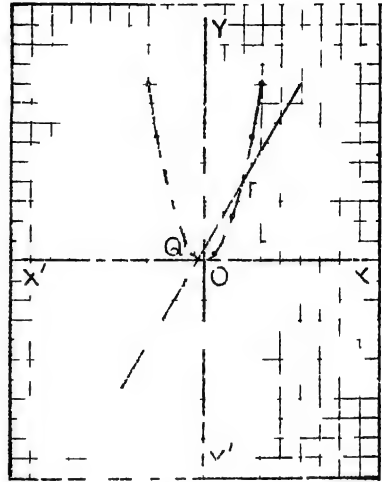
এই বিন্দুগুলি স্থাপন করিয়া যোগ করিলে যে সরলরেখাটি হইল উহাই দ্বিতীয় সমীকরণের লেখ।

∴ দুইটি সমীকরণই  $y$ -এর সমান, ∴  $x^2 = \frac{5x}{3} + 2$ , বা  $3x^2 = 5x + 2$ , বা,  $3x^2 - 5x - 2 = 0$ .  
অতএব, লেখ দুইটির ছেদবিন্দুদ্বয়ের ভূজদ্বয়ই  $3x^2 - 5x - 2 = 0$  এই সমীকরণের বীজ হইবে।

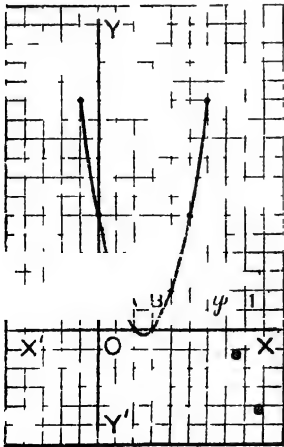
এখানে লেখদ্বয়  $P$  ও  $Q$  বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং উহাদের ভূজ যথাক্রমে 2 ও -'3 (প্রাপ্ত)।

∴ নির্ণেয় বীজ  $x=2$  বা  $-3$ .

উদা. 23. Draw the graph of  $y=x^2-3x+2$  and hence solve the equation  $x^2-3x+1=0$ ,



[চিত্র নং ১৮]



[চিত্র নং ১৯]

উদা 20 দেখ। ঐ অধিবৃত্তটি এখানে  $y=x^2-3x+2$  সমীকরণের লেখ।  
ঐ লেখটি হইতে  $x^2-3x+1=0$  এই সমীকরণটি সমাধান করিতে হইবে।

$$\text{এখানে } x^2-3x+1=0,$$

$$\text{বা, } x^2-3x+2=1.$$

মনে কর,  $y=x^2-3x+2$ , সুতরাং  $y=1$ , এই সমীকরণ দুইটির লেখদ্বয়ের ছেদবিন্দু দুইটিই ভূজদ্বয় নির্ণেয় বীজ হইবে। প্রথম সমীকরণের লেখ উদা. 20র মত আঁক।  $y=1$ এর লেখ হইবে  $x$ -অক্ষ হইতে 1 একক উপরে

$x$ -অক্ষের সমান্তরাল রেখা। লেখক্স পরস্পর A ও B বিন্দুতে ছেদ করিল। বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক (4, 1) এবং (2.6, 1).  $\therefore$  নির্ণেয় বীজ  $x=4$ , বা 2.6.

উদা. 24. Draw the graph of  $y=5x^2+2x-1$ . Read off the abscissa where this graph is cut by  $y=3$ . These are the roots of the equation  $5x^2+2x-4=0$ . Explain why.

[ C. U. '48 ]

$$y=5x^2+2x-1 \text{ হইতে পাই } \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} x & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & \dots \\ \hline y & -1 & 6 & -2 & 23 & 15 & \dots \end{array}$$

মনে কর,  $XOX'$  ও  $YOY'$  অক্ষদ্বয় O মূলবিন্দুতে পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করিয়াছে। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরিয়া অধিবৃত্তটি অঙ্কিত কর। উহাই উদ্দিষ্ট লেখ হইল।

তারপর  $x$ -অক্ষ হইতে 3 একক উপরে ঐ অক্ষের সমান্তরাল রেখা আঁক। উহাই  $y=3$  এর লেখ হইল। এই লেখদ্বয় যে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিল তাহাদের নির্ণেয় ভূজদ্বয় যথাক্রমে -1.7 ও .7.

এক্ষণে প্রদত্ত সমীকরণটি  $5x^2+2x-4=0$ , সুতরাং  $5x^2+2x-1=3$ . মনে কর,  $y=5x^2+2x-1$ , সুতরাং  $y=3$ ,  $\therefore$  অঙ্কিত লেখদ্বয়ের ছেদবিন্দুদ্বয়ের ভূজ দুইটিই  $5x^2+2x-4=0$  সমীকরণের বীজ হইবে।

উদা. 25. Draw the graphs of  $y=x^2$  and  $x-y+6=0$ . Hence solve  $x^2-x-6=0$ . [ D. B. '14, '30, '40 ]

প্রথম সমীকরণের লেখ হইবে একটি অধিবৃত্ত। উদা. 13-র মত এই লেখটি অঙ্কিত কর। দ্বিতীয় সমীকরণের লেখ এক সরলরেখা। (0, 6). (-2, 4), (-6, 0) এই বিন্দুগুলি যোগ করিয়া এই লেখটি আঁক।

মনে কর, এই লেখ দুইটি A ও B বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল। এক্ষণে,  $x^2-x-6=0 \therefore x^2=x+6$ ; ধর  $y=x^2 \dots (1)$  এবং  $y=x+6$ , বা  $x-y+6=0 \dots (2)$ . আমাদের অঙ্কিত অধিবৃত্তটি (1)-এর এবং সরল রেখাটি (2)-এর লেখ। সুতরাং A ও B-এর ভূজদ্বয়ই প্রদত্ত সমীকরণের নির্ণেয় বীজ হইবে। এখানে A বিন্দুর ভূজ -2 এবং B-এর ভূজ 3.

$\therefore x=-2$  বা 3.

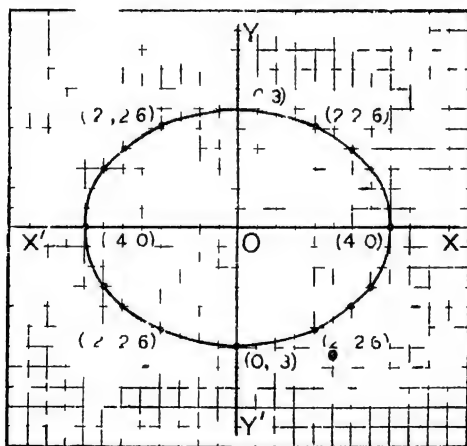
উদা. 26. Draw the graph of  $9x^2 + 16y^2 = 144$ .

$$9x^2 + 16y^2 = 144, \text{ বা } 16y^2 = 144 - 9x^2 = 9(16 - x^2),$$

বা,  $y^2 = \frac{9}{16}(16 - x^2), \therefore y = \pm \frac{3}{4} \sqrt{16 - x^2} \dots (1),$  ইহা হইতে

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} x & 0 & \pm 4 & \pm 1 & \pm 2 & \pm 3 & \pm 3.5 & \dots \\ \hline y & \pm 3 & 0 & \pm 2.9 & \pm 2.6 & \pm 2.0 & \pm 1.5 & \dots \end{array}$$

এই বিন্দুগুলি সমীকরণটির লেখের উপর অবস্থিত। মনে কর,  $XOX', YOY'$  অক্ষদ্বয় লগ্নভাবে  $O$  মূলবিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিয়াছে। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরিয়া বিন্দুগুলি স্থাপন কর। এই বিন্দুগুলি হস্তাক্ষিত সন্তুত রেখাদ্বারা যোগ করিয়া যে উপবৃত্তটি ( Ellipse ) পাওয়া গেল, উহাই নির্ণেয় লেখ হইল।



[ চিত্র নং ২০ ]

[ দ্রষ্টব্য : (a) উপরের (1) হইতে দেখা যায় যে  $x$ -এর মান 4 অপেক্ষা বেশী ও  $-4$  অপেক্ষা কম হইতে পারে না, কারণ, তাহা হইলে  $y$ -এর মান কাল্পনিক (imaginary) হয়। সুতরাং বুঝা গেল লেখটি  $x = \pm 4$  এই দুই সমান্তরাল সরল রেখার মধ্যে সীমাবদ্ধ। আবার,  $x$ -এর কোন মান লইলে তাহা হইতে  $y$ -এর দুইটি মান পাওয়া যায়, উহা বা সমান কিন্তু একটি ঋণাত্মক ও অগুটি ধনাত্মক। অতএব, লেখটি  $y$ -অক্ষ সম্বন্ধে প্রতিসম।



প্রদত্ত সমীকরণটিকে  $x = \pm \frac{4}{3} \sqrt{9 - y^2}$ , এইভাবেও লেখা যায়। ইহা হইতে দেখা যায় যে,  $y$ -এর মান 3 অপেক্ষা বেশী এবং  $-3$  অপেক্ষা কম হইলে  $x$ -এর মান কাল্পনিক হইয়া পড়ে। সুতরাং লেখটি  $y = \pm 3$  এই সমান্তরাল রেখাভয়ের মধ্যে সীমাবদ্ধ। আর  $y$ -এর কোন মানের পক্ষে  $x$ -এর দুইটি সমান মান হয়, একটি ধনাত্মক অত্রটি ঋণাত্মক। অতএব লেখটি  $x$ -অক্ষ সম্বন্ধে প্রতিসম। আর এই লেখটি সকল দিকে সীমাবদ্ধ বলিয়া একটি বদ্ধ (closed) রেখা হইল।

(b) আরও জটিল্য এই যে, প্রদত্ত সমীকরণকে রূপান্তরিত করিয়া  $x^2 + y^2 = 16$ , এই আকারেও লেখা যায়। আবার,  $4x^2 + y^2 - 8x - 4y = 8$  এই সমীকরণটিকে  $(4x^2 - 8x + 4) + (y^2 - 4y + 4) = 16$ ,

বা,  $4(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$  এইভাবে লেখা যায়। অতএব ইহার লেখও একটি উপবৃত্ত। সহজে ইহার লেখটি অঙ্কিত করিতে হইলে মূলবিন্দুকে (1, 2) স্থানান্তরিত করিয়া অর্থাৎ (1, 2) বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরিয়া  $4x^2 + y^2 = 16$ , এই সমীকরণের লেখ অঙ্কিত করিলেই হইবে।

(c)  $\frac{x}{4} \sqrt{16 - x^2}$  এই অপেক্ষকের লেখ এবং  $y = \frac{x}{4} \sqrt{16 - x^2}$  সমীকরণের লেখ একই।]

উদা. 27. Draw the graph of  $9x^2 - 16y^2 = 144$ .

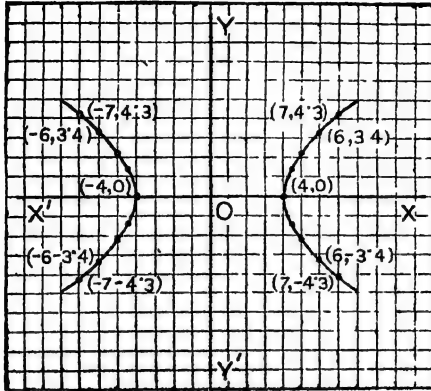
$$9x^2 - 16y^2 = 144, \text{ বা, } y^2 = \frac{9x^2 - 144}{16}, \text{ বা, } y = \pm \frac{3}{4} \sqrt{x^2 - 16},$$

$$\text{উহা হইতে পাই } \begin{array}{c|c|c|c|c|c} x & \pm 4 & \pm 5 & \pm 6 & \pm 7 & \pm 4.5 & \dots \\ \hline y & 0 & \pm 2.25 & \pm 3.4 & \pm 4.3 & \pm 1.5 & \dots \end{array}$$

মনে কর,  $XOX'$  ও  $YOY'$  অক্ষদ্বয়  $O$  মূলবিন্দুতে পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করিয়াছে। চক কাগুজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরিয়া উপরের বিন্দুগুলি স্থাপন কর। এক এক পার্শ্বের বিন্দুগুলিকে হস্তাক্ষিত সন্তত রেখা দ্বারা যোগ করিলে যে লেখটি পাই তাহাই উদ্ভিষ্ট লেখ [চিত্র নং ২১]। ইহাকে পরাবৃত্ত (Hyperbola) বলে।

[জটিল্য : (1)  $x$ -এর কোন মান লইলে  $y$ -এর দুইটি সমান মান (একটি ঋণাত্মক, অত্রটি ধনাত্মক) পাওয়া যায়, সুতরাং লেখটি  $x$ -অক্ষ সম্বন্ধে প্রতিসম।

অনুরূপে উহা  $y$ -অক্ষ সম্বন্ধেও প্রতিসম। (2) এখানে  $x=0$  হইলে,  $y$ -এর মান কাল্পনিক হয় বলিয়া লেখটি  $y$ -অক্ষকে কখনও ছেদ করিবে না। (3) এখানে  $x$ -এর মান  $\pm 4$ -এর মধ্যে হইলে  $y$ -এর মান কাল্পনিক হইবে, সুতরাং



[ চিত্র নং ২১ ]

লেখটির কোন অংশ  $x = \pm 4$  এই দুই সমান্তরাল রেখার মধ্যে থাকিবে না। (4) এই লেখটির দুইটি শাখা এবং উভয় শাখাই অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত।]

উদা. 28. Draw the graph of  $9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 91 = 0$ .

$$9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 91 = 0,$$

$$\text{বা, } (9x^2 - 18x + 9) - (16y^2 + 64y + 64) - 36 = 0,$$

$$\text{বা, } 9(x-1)^2 - 16(y+2)^2 = 36.$$

একপক্ষে মূলবিন্দুকে (1, -2) বিন্দুতে স্থানান্তরিত করিয়া  $9x^2 - 16y^2 = 36$  এই সমীকরণের লেখ অঙ্কিত করিলেই প্রদত্ত সমীকরণের লেখ হইবে।

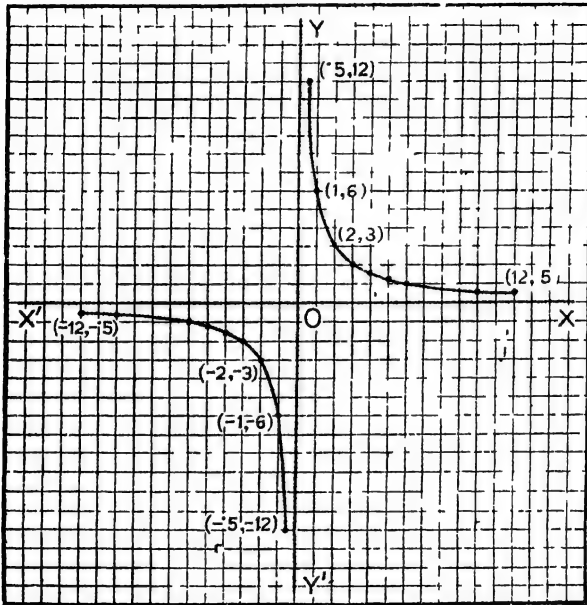
উদা. 29. Draw the graph of  $xy = 6$ . •

$$\because xy = 6, \therefore y = \frac{6}{x}, \text{ ইহা হইতে পাই}$$

$x$	5	-5	1	-1	2	-2	4	-4	6	-6
$y$	12	-12	6	-6	3	-3	1.5	-1.5	1	-1

এই বিন্দুগুলি লেখটির উপরে অবস্থিত।

মনে কর,  $XOX'$  ও  $YOY'$  অক্ষদ্বয়  $O$  মূলবিন্দুতে পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করিয়াছে। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া বিন্দুগুলি স্থাপন কর। এক এক পার্শ্বের বিন্দুগুলি হস্তাক্ষিত সন্তত রেখা দ্বারা যোগ করিলে যে সম-পরাবৃত্ত (rectangular hyperbola) পাইবে উহাই প্রদত্ত সমীকরণের লেখ [ চিত্র নং ২২ ]।

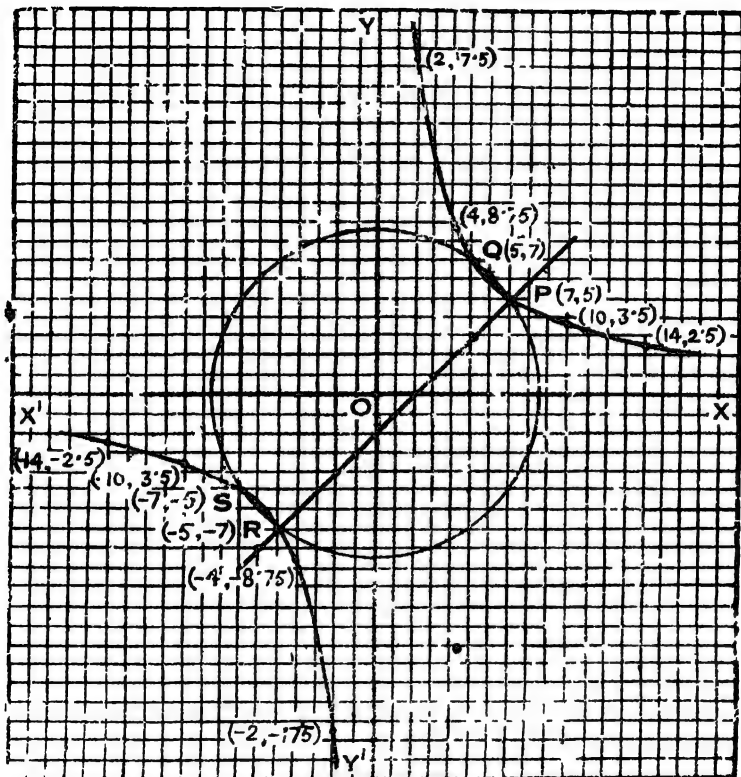


[ চিত্র নং ২২ ]

[ লক্ষ্যব্য : (1) এই লেখটির দুইটি শাখা। একটি শাখা  $OX$  ও  $OY$  রেখাদ্বয়ের মধ্যে এবং অপরটি  $OX'$  ও  $OY'$  রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত। (2) এখানে  $x$ -এর মান ক্রমশঃ বৃদ্ধি পাইবে  $y$ -এর মান ক্রমশঃ হ্রাস পাইবে। অবশেষে  $x$  যদি অসীম হয়, তবে  $y$ -এর মান তখন শূন্য হইবে। অতএব রেখাটি ক্রমাগত  $x$ -অক্ষের নিকটবর্তী হইলেও, উহাকে কোন সসীম দূরত্বের মধ্যে ছেদ করিবে না ; কিন্তু অসীমে উহাদের ছেদবিন্দু থাকিবে।  $y$ -অক্ষের পক্ষেও ইহা ন্যায় হইবে ]

উদা. 30. Solve the following pairs of equations graphically :

(i)  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 74 \\ xy = 35 \end{cases}$  and (ii)  $\begin{cases} x - y = 2 \\ xy = 35 \end{cases}$ .



[ চিত্র নং ২৩ ]

এখানে নিম্নলিখিত লেখ তিনটি অঙ্কিত করিতে হইবে :—

- (1)  $x^2 + y^2 = 74$  ( ইহার লেখ একটি বৃত্ত )
- (2)  $xy = 35$  ( ইহার লেখ একটি সম-পরাবৃত্ত )
- (3)  $x - y = 2$  ( ইহার লেখ একটি সরল রেখা ।

(1) হইতে পাই  $y^2 = 74 - x^2$ , বা  $y = \pm \sqrt{74 - x^2}$ .

এক্ষেত্রে দেখা যায়  $7^2 + 5^2 = 74$ . অতএব,  $x=7$ ,  $y=5$  দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

এক্ষেপে ছক কাগজে (7, 5) স্থানাঙ্কবিশিষ্ট P বিন্দু স্থাপন কর এবং মূলবিন্দু Oকে কেন্দ্র করিয়া OP ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।  
উহাই  $x^2 + y^2 = 74$  সমীকরণের লেখ হইল।

(2)  $xy=35$ ,  $\therefore y = \frac{35}{x}$ , ইহা হইতে পাই

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} x & 5 & 7 & -5 & -7 & 4 & -4 & 10 & -10 & \dots \\ \hline y & 7 & 5 & -7 & -5 & 8.75 & -8.75 & 3.5 & -3.5 & \dots \end{array}$$

এই বিন্দুগুলি স্থাপন করিয়া সম-পরাবৃত্তটি অঙ্কিত কর।

(3)  $x-y=2$ , বা  $y=x-2$ , ইহা হইতে পাই  $\begin{array}{c|c|c|c|} x & 5 & 3 & -2 \\ \hline y & 3 & 1 & -4 \end{array}$ .

এই বিন্দুগুলি স্থাপন করিয়া সরল রেখাটি অঙ্কিত কর।

মনে কর, ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর সমান দৈর্ঘ্য একক লইয়া লেখত্রয় অঙ্কিত করা হইল।

এক্ষেপে দেখা যাইতেছে বৃত্তটি সম-পরাবৃত্তকে P, Q, R, S বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। উহাদের স্থানাঙ্ক 'ষথাক্রমে' (7, 5), (5, 7), (-5, -7) এবং (-7, -5).

অতএব প্রদত্ত (i) সমীকরণযুগলের সমাধান

$$\begin{array}{l} x=7 \\ y=5 \end{array}, \quad \begin{array}{l} x=5 \\ y=7 \end{array}, \quad \begin{array}{l} x=-5 \\ y=-7 \end{array} \text{ এবং } \begin{array}{l} x=-7 \\ y=-5 \end{array}.$$

আবার, সরলরেখাটি সম-পরাবৃত্তকে যে-দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে তাহাদের স্থানাঙ্ক (7, 5) ও (-5, -7).

অতএব, প্রদত্ত (ii) সমীকরণযুগলের সমাধান  $x=7$ ,  $y=5$ ;

অথবা,  $x=-5$ ,  $y=-7$ .

### 56. লেখ অঙ্কন দ্বারা প্রশ্ন সমাধান

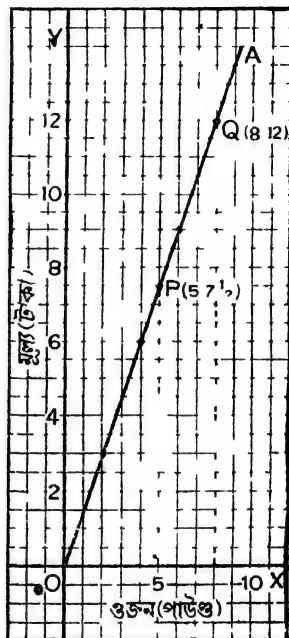
উদা. 1. If 1 lb. of tea costs Re. 1.8as., find by means of a graph (i) the price of 5 lbs. of tea and (ii) the quantity of tea that can be had for Rs. 12.

মনে কর,  $x$  পাউণ্ড ওজনের চায়ের মূল্য  $y$  টাকা। এখানে বলা আছে 1 পাউণ্ড চায়ের মূল্য  $\frac{3}{2}$  টাকা,  
 $\therefore x$  পাউণ্ড চায়ের মূল্য  $\frac{3x}{2}$  টাকা  
 $\therefore y = \frac{3}{2}x$  হইল এবং ইহাই এখানে উদ্দিষ্ট লেখটির সমীকরণ।

এক্ষেপে মনে কর, ছক কাগজে  $x$ -অক্ষের উপর অবস্থিত ক্ষুদ্রতম বাক্সের একটি বাহু 1 পাউণ্ড ওজন এবং  $y$ -অক্ষের উপর অবস্থিত সমরূপ দুইটি বাহু 1 টাকা মূল্য সূচিত করে।

$$y = \frac{3}{2}x \text{ হইতে } \begin{array}{c|c|c|c|} x & 2 & 4 & 6 \\ \hline y & 3 & 6 & 9 \end{array}$$

$y = \frac{3}{2}x$  এর লেখ OA আঁকা হইল।



(i) এই লেখটির যে কোন বিন্দুর ভূজ ও কোটি দ্বারা যথাক্রমে চায়ের ওজন (পাউণ্ডে) এবং উহার মূল্য (টাকায়) সূচিত হইবে।

লেখটি হইতে দেখা যায় যে, লেখটির যে বিন্দুর (P) ভূজ 5 একক, তাহার কোটি =  $7\frac{1}{2}$  একক, সুতরাং 5 পাউণ্ড চায়ের মূল্য  $7\frac{1}{2}$  টাকা হইল।

(ii) আবার, দেখা যায় লেখটির যে বিন্দুর (Q) কোটি 12 একক তাহার ভূজ = 8 একক; সুতরাং 12 টাকায় 8 পাউণ্ড চা পাওয়া যাইবে।

[জটিল্য: এখানে OA সরলরেখাকে চায়ের মূল্য-লেখ (Price graph) বলে।]

**উদা. 2.** A man walks at the rate of 3 miles an hour. Draw his motion-graph and find from it (i) how far he will walk in 2 hrs. 20 mins. and (ii) in what time he will walk 14 miles.

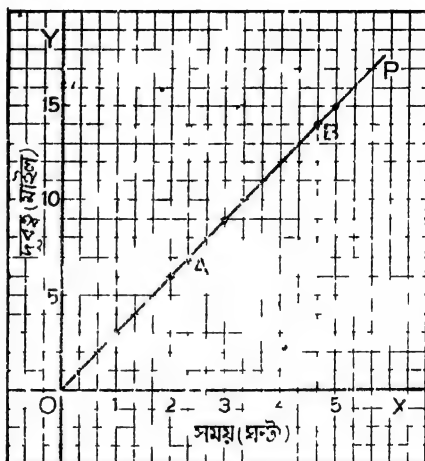
মনে কর, লোকটি  $x$  ঘণ্টায়  $y$  মাইল যায়। এখানে লোকটি 1 ঘণ্টায় 3 মাইল যায়, সুতরাং  $x$  ঘণ্টায় যায়  $3x$  মাইল।

$\therefore y$  মাইল  $= 3x$  মাইল।  $\therefore y = 3x$  এই সমীকরণের লেখটি লোকটির গতি-লেখ (motion-graph) হইবে।

মনে কর,  $x$ -অক্ষ বরাবর

ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 3টি বাহু 1 ঘণ্টা বা 1টি বাহু 20 মিনিট সূচিত করে এবং  $y$ -অক্ষ বরাবর অন্তরূপ 1টি বাহু এক মাইল সূচিত করে।

$y = 3x$  এর লেখ OP আঁকা হইল। OP সরল-রেখাই উদ্দিষ্ট গতি-লেখ। এই লেখটির যে কোন বিন্দুর ভূজ ও কোটি দ্বারা বর্ণাক্রমে গতির সময় ও দূরত্ব সূচিত হইবে।



(i) 2 ঘ. 20 মি.  $= \frac{4}{3}$  ঘণ্টা। এখানে দেখা যায় লেখটির যে বিন্দুর (A) ভূজ  $= 7$  বাহু  $= \frac{7}{3}$  একক, তাহার কোটি  $= 7$  বাহু  $= 7$  একক। অতএব, লোকটি  $\frac{4}{3}$  ঘণ্টায় বা 2 ঘণ্টা 20 মিনিটে 7 মাইল পথ যাইবে।

(ii) আবার দেখা যায় যে, লেখস্থিত যে বিন্দুর (B) কোটি  $= 14$  একক, তাহার ভূজ  $= \frac{14}{3}$  একক (14 বাহু); সুতরাং  $\frac{14}{3}$  মাইল যাইতে লোকটির  $\frac{14}{3}$  ঘ. বা 4 ঘণ্টা 40 মিনিট সময় লাগিবে।

[**জট্টব্য :** OP লেখটিকে লোকটির গতি-লেখ (motion-graph) বলে। লোকটি সমবেগে গতিশীল বলিয়া তাহার গতি-লেখ একটি সরল রেখাই হইবে।]

উদা 3. If the price of two mangoes be 5 annas, find graphically the price of 5 mangoes and the number of mangoes that can be had for Re. 1. 4 as.

মনে কর,  $x$  সংখ্যক আমের মূল্য  $y$  আনা। এখানে 2টি আমের মূল্য = 5 আনা,

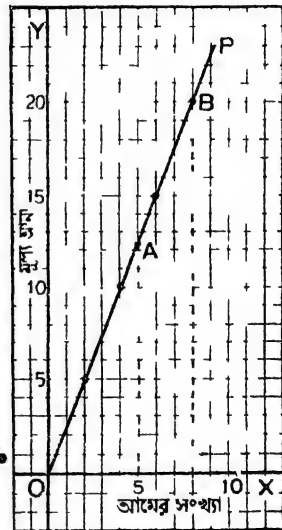
$$1 \text{টি আমের মূল্য} = \frac{5}{2} \text{ আনা}, \therefore x \text{ আমের মূল্য} = \frac{5x}{2} \text{ আনা।}$$

অতএব, গ্রন্থলে  $y = \frac{5x}{2}$ , এই সমীকরণে

লেখটি আমের মূল্য-লেখ হইবে।

$x$ -অক্ষের উপরিস্থিত ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে একটি আম এবং  $y$  অক্ষের উপর অবস্থিত অনুরূপ একটি বাহুকে 1 আনা পরিমাণ  $y = \frac{5x}{2}$  এবং লেখ OP আঁকা হইল।

এক্ষণে, লেখ হইতে দেখা যাইতেছে যে (1) এই লেখটির যে বিন্দুর (A) ভূজ = 5 একক, তাহার কোটি =  $12\frac{1}{2}$  একক।



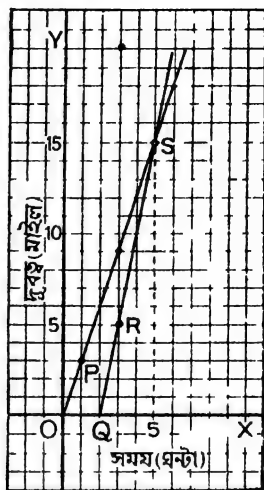
$\therefore$  5টি আমের মূল্য =  $12\frac{1}{2}$  আনা।

(ii) আবার, 1 টা 4 আ. = 20 আনা। লেখটির যে বিন্দুর (B) কোটি = 20 একক, তাহার ভূজ = 8 একক, সুতরাং 20 আনার বা 1 টা. 4 আনার 8টি আম পাওয়া যাইবে।

উদা. 4. A starts walking at 8 A.M. at the rate of 3 miles an hour. After 2 hours B runs after him at the rate of 5 miles an hour. Find graphically when and where B will overtake A.



মনে কর,  $x$ -অক্ষস্থিত ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের এক বাহকে 1 ঘণ্টা এবং  $y$ -অক্ষস্থিত অধুর্নক এক বাহকে 1 মাইল ধরা হইল। মনে কর,  $O$  মূল-বিন্দু হইতে  $A$  রওনা হইয়া ঘণ্টায় 3মা. বেগে চলিতে লাগিল। মনে কর,  $P$  বিন্দুর স্থানাঙ্ক  $(1, 3)$ , সুতরাং  $P$  বিন্দুর ভূজ 1 এককে 1 ঘণ্টা ও কোটি 3 এককে 3 মাইল সূচিত করে বলিয়া এই বিন্দুটি  $A$ -এর গতি-লেখস্থিত হইবে।  $\therefore$  বর্ধিত  $OP$  সরল রেখাই  $A$ -র গতি-লেখ হইল।

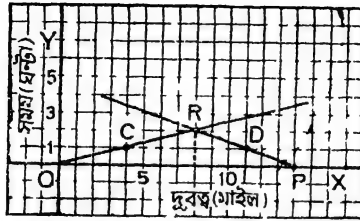


আবার,  $A$  রওনা হওয়ার 2 ঘণ্টা পরে  $B$  রওনা হইয়াছে বলিয়া এই 2 ঘণ্টা  $B$  মোটেই চলে নাই, 2 ঘণ্টা অতীত হইয়াছে বটে, কিন্তু তার গতি 0 মাইল।  $Q$  এমন একটি বিন্দু স্থাপন কর যাহার স্থানাঙ্ক  $(2, 0)$ , সুতরাং  $OQ$  রেখা হইবে  $B$ -এর এই 2ঘণ্টার (8টা হইতে 10টার) গতি-লেখ। তারপর সে ঘণ্টায় 5 মাইল বেগে চলিয়াছে। এক্ষণে, এই  $Q$  বিন্দুকে মূল-বিন্দু ধরিয়া  $R$  এমন একটি বিন্দু স্থাপন কর যাহার স্থানাঙ্ক  $(1, 5)$ । এক্ষণে বর্ধিত  $QR$  সরলরেখাই  $B$ -এর 2 ঘণ্টার পরবর্তীকালের গতি-লেখ হইল।

এই  $OP$  ও  $QR$  লেখদ্বয় পরস্পর  $S$  বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।  $O$ -কে মূল-বিন্দু ধরিয়া  $S$ -এর স্থানাঙ্ক হইল  $(5, 15)$ , এই ভূজ 5 এককে 5 ঘণ্টা এবং কোটি 15 এককে 15 মাইল সূচিত করে।  $\therefore$   $A$ -রওনা হওয়ার 5 ঘণ্টা পরে বেলা 1 টায় এবং যাত্রাস্থল হইতে 15 মাইল দূরে  $A$ -কে  $B$  ধরিতে পারিবে।

**উদা. 5.**  $A$  and  $B$  are at a distance of 14 miles and start at the same time cycling towards each other at the rates of 4 and 3 miles per hour respectively. Find by a graph when and where they will meet.

ছক কাগজে  $x$  ও  $y$  অক্ষ অঙ্কিত কর এবং মূল-বিন্দু  $O$  লও। মনে কর,  $x$ -অক্ষস্থিত ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের এক বাহু দ্বারা 1 মাইল এবং  $y$ -অক্ষস্থিত অনুরূপ 1 বাহু দ্বারা 1 ঘণ্টা সূচিত হয়।



১. অক্ষের উপর  $O$  বিন্দু হইতে 14 বাহু দূরে  $P$  বিন্দু লও, ইহাতে  $OP$  14 মাইল সূচিত করিল।

মনে কর  $A$  ঘণ্টায় 4 মাইল বেগে  $O$  হইতে  $P$ -এর দিকে এবং  $B$  ঘণ্টায় 3 মাইল বেগে  $P$  হইতে  $O$ -এর দিকে যাইতে লাগিল। অতএব  $A$  র গতিচিত্র  $O$  বিন্দুগামী একটি সরলরেখা এবং  $B$ -এর গতিচিত্র  $P$  বিন্দুগামী একটি সরলরেখা হইবে। এক্ষণে,  $\therefore A$  4 মাইল যায় 1 ঘণ্টায়,  $\therefore$  তাহার গতি-লেখ  $(4, 1)$  বিন্দু  $C$  দিয়া যাইবে। অতএব, বর্ধিত  $OC$  সরলরেখা  $A$ -র গতি লেখ হইল।

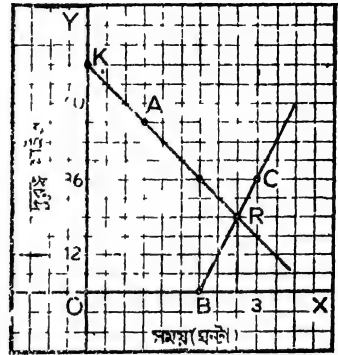
আবার,  $P$  বিন্দুকে মূল-বিন্দু ধরিয়া  $D$  বিন্দুর ভূজ ও কোটি যথাক্রমে 3 ও 1 একক লও। স্তরায় বর্ধিত  $PD$  সরলরেখা  $B$ -এর গতি-লেখ হইল। লেখ দুইটি  $R$  বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।  $O$  মূল-বিন্দু ধরিয়া  $R$  বিন্দুর স্থানাঙ্ক  $(8, 2)$ , উহা দ্বারা 8 মা. এবং 2 ঘণ্টা সূচিত হয়। অতএব,  $A$ -র যাত্রাস্থল হইতে 8 মাইল দূরে এবং  $R$  ওনা হইবার 2 ঘণ্টা পরে উভয়ে মিলিত হইবে।

উদা. 6. A mail train starts from Howrah at 9 P. M. and reaches Kharagpur, a distance of 72 miles, at 11 P. M. A passenger train starts from Kharagpur at 7 P. M. and

reaches Howrah at 11 P. M. Find graphically when and where they meet. [ W. B. S. F. 1955 ( Addl. ) ]

মনে কর, মেল ট্রেনকে M এবং যাত্রীবাহী ট্রেনকে P ধরা হইল। M ট্রেন এক ঘণ্টায়  $(72 \div 2)$  মা. বা 36 মাইল যায় এবং P ট্রেন এক ঘণ্টায়  $(72 \div 4)$  বা 18 মাইল যায়।

ছক কাগজে  $x$  ও  $y$  অক্ষ অঙ্কিত করিয়া মূল-বিন্দু O লও।  $x$ -অক্ষস্থিত ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 3টি বাহুর সমান দৈর্ঘ্যকে এক ঘণ্টা এবং  $y$ -অক্ষের উপর অনুরূপ একটি বাহুকে 6 মাইল ধর।



মনে কর, O বিন্দুতে হাওড়ার অবস্থান এবং OY-এর উপর O হইতে 72 মাইল ( ~~৩৬~~ 12টি বাহু ) দূরে K বিন্দুতে খড়্গপুরের অবস্থান।

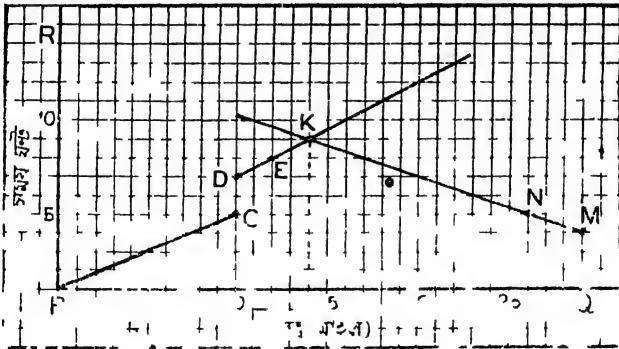
ট্রেন দুইটি সমবেগে যায় বলিয়া উহাদের গতি-চিত্র দুইটি সরলরেখা হইবে। P ট্রেনটি 7টায় K বিন্দু হইতে রওনা হইয়াছে, সুতরাং K বিন্দু উহার গতি-চিত্রের উপর থাকিবে। আবার, P ট্রেন হাওড়া দিকে (অর্থাৎ উল্টা দিকে) 1 ঘণ্টায় 18 মাইল গিয়াছে। Kকে মূল-বিন্দু ধরিয়া A এমন একটি বিন্দু স্থাপন কর যাত্রার স্থানাক দ্বারা 1 ঘণ্টা ও 18 মাইল সূচিত হয় অর্থাৎ যাত্রার ভূজ=3 বাহু এবং কোটি=3 বাহু ( নিম্নের দিকে )। A বিন্দু P-এর গতি চিত্রের উপর অবস্থিত থাকিবে। KA যোগ কর। এই বর্ধিত KA সরলরেখা P-এর গতি-লেখ হইল।

আবার, M ট্রেন 9টায় সময় যাত্রা করায় প্রথম 2 ঘণ্টায় ( 7টা হইতে 9টা ) M ট্রেন কোন দূরত্ব যায় নাই। OX-এর উপর এমন একটি বিন্দু B লও যেন OB দ্বারা 2 ঘণ্টা ( 6টি বাহু ) সূচিত হয়। এই B বিন্দু M ট্রেনের যাত্রা-স্থান সূচিত করিবে এবং উহা M ট্রেনের গতি-চিত্রের উপর অবস্থিত থাকিবে। M ট্রেন এক ঘণ্টায় 36 মা. যায়। Bকে মূল-বিন্দু ধরিয়া C এমন একটি বিন্দু বলাও যাত্রার স্থানাক দ্বারা 1 ঘণ্টা ও 36 মাইল সূচিত হয় অর্থাৎ যাত্রার

ভূজ=3 বাহু এবং কোটি=6 বাহু। C বিন্দু M ট্রেনের গতি-চিত্রের উপর অবস্থিত, সুতরাং বর্ধিত BC সরলরেখা M ট্রেনের গতি-লেখ।

O মূল-বিন্দু হইতে উক্ত লেখ দুইটির ছেদবিন্দু R-এর ভূজ=8 বাহু (অর্থাৎ  $\frac{8}{3}$  ঘণ্টা বা 2 ঘ 40 মি.) এবং কোটি=4 বাহু (অর্থাৎ  $4 \times 6$  বা 24 মাইল)। অতএব, 7টার 2 ঘ. 40 মি. পরে অর্থাৎ 9টা 40 মিনিটের সময় হাওড়া হইতে 24 মাইল দূরে উভয় ট্রেনের সাক্ষাৎ হইবে।

উদা 7. P and Q are two places 29 miles apart. A starts from P and walks towards Q at  $2\frac{1}{2}$  miles an hour. After 4 hours he takes rest for 2 hours and then resumes his journey at the rate of 2 miles an hour. B starts from Q 3 hours after A leaves P and walks towards P at the rate of 3 miles an hour. Find graphically when and where they will meet.



মনে কর, ছক কাগজে পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত PQ ও PR সরল রেখাভঙ্গর যথাক্রমে  $x$  ও  $y$  অক্ষরেখা সূচিত করে। আর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের এক একটি বাহু PQ রেখার উপর এক মাইল এবং PR রেখার উপর এক ঘণ্টা নির্দেশ করে। এখানে  $PQ=29$  বাহু (29 মাইল)।

(i) P হইতে রওনা হইয়া A ঘণ্টায়  $2\frac{1}{2}$  মা. বেগে 4 ঘণ্টায় ( $2\frac{1}{2} \times 4$ ) বা 10 মাইল গিয়াছে। C একটি বিন্দু স্থাপন কর যাহার স্থানাঙ্ক (10, 4) অর্থাৎ যাহার ভূজ 10 বাহু দ্বারা 10 মাইল এবং কোটি 4 বাহু দ্বারা 4 ঘণ্টা বুঝায়। PC যোগ কর। PC রেখা A-এর প্রথম 4 ঘণ্টার গতি-লেখ হইল। তারপর 2 ঘণ্টা A বিশ্রাম করায় ঐ সময়ে কোন দূরত্ব যায় নাই; সুতরাং তাহার ঐ দুই ঘণ্টার গতি-লেখ একরূপ হইবে যাহার উপরিস্থ যে কোন বিন্দুর ভূজ 10 মাইল নির্দেশ করিবে। এখন C-কে মূল-বিন্দু ধরিয়া D এমন একটি বিন্দু স্থাপন কর যাহার স্থানাঙ্ক (0, 2), সুতরাং CD সরলরেখা A-র 2 ঘণ্টা বিশ্রামকালের গতি-লেখ হইল।

ইহাব পর A ঘণ্টায় 2 মাইল গতিতে D বিন্দু হইতে রওনা হইয়া Q-এর দিকে চলিতে লাগিল। এখন D-কে মূল-বিন্দু ধরিয়া এমন একটি বিন্দু স্থাপন কর যাহার স্থানাঙ্ক (2, 1); সুতরাং বর্ধিত DE সরলরেখা A-র বিশ্রামের পরবর্তী কালের গতি-লেখ হইল।

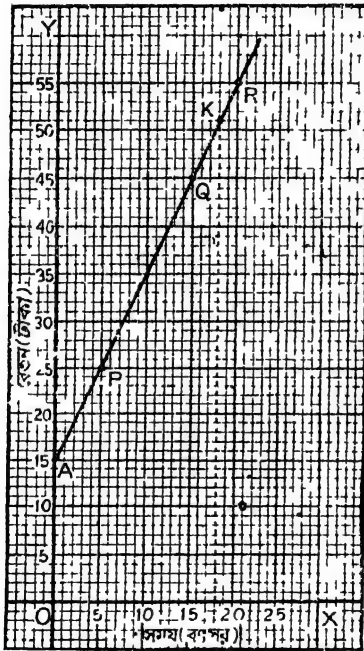
(ii) আবার, A রওনা হওয়ার 3 ঘণ্টা পরে Q বিন্দু হইতে B রওনা হইয়াছে, সুতরাং এই তিন ঘণ্টায় B কোন দূরত্ব যায় নাই। এখন Q-কে মূল-বিন্দু ধরিয়া M এমন একটি বিন্দু স্থাপন কর যাহার ভূজ দ্বারা 0 মাইল এবং কোটি দ্বারা 3 ঘণ্টা সূচিত হয়। QM সরলরেখা B-র 3 ঘণ্টা বিশ্রামকালের গতি-লেখ হইল। তৎপরে B ঘণ্টায় 3 মাইল বেগে M বিন্দু হইতে P-র দিকে চলিয়াছে। M-কে মূল-বিন্দু ধরিয়া N বিন্দু স্থাপন কর যেন N-এর ভূজ ও কোটি দ্বারা যথাক্রমে 3 মাইল ও 1 ঘণ্টা সূচিত হয়। অতএব বর্ধিত MN সরলরেখা B-র বিশ্রামের পরবর্তীকালের গতি-লেখ।

এখানে DE ও MN লেখদ্বয় পরস্পর K বিন্দুতে ছেদ করিল। P-কে মূল-বিন্দু ধরিয়া K-এর ভূজ ও কোটি (অর্থাৎ স্থানাঙ্ক) দ্বারা যথাক্রমে 14 মাইল ও 8 ঘণ্টা সূচিত হইতেছে। অতএব P হইতে 14 মাইল দূরে এবং A রওনা হওয়ার 8 ঘণ্টা পরে A ও B পরস্পর মিলিত হইবে।

**উদা. 8.** A man's salary after 5 years of service is 25 rupees, after 15 years it is 45 rupees and after 20 years it is

55 rupees. If his salary was increasing at a uniform rate, show by graph his starting salary and the salary he will get after 18 years' service. [Pat. U. 1945]

এখানে বেতন সম্বন্ধে বাড়িতেছে বলিয়া লেখা একটি সরলরেখা হইবে এবং 5 বৎসর ও 25 টাকা, 15 বৎসর ও 45 টাকা, 20 বৎসর ও 55 টাকা স্থচক বিন্দুগুলি এই লেখাস্থিত হইবে।



মনে কর,  $x$ -অক্ষস্থিত ক্ষুদ্রতম একটি বাছ 1 বৎসর এবং  $y$ -অক্ষস্থিত অন্তরূপ একটি বাছ 1 টাকা স্থচিত করে।

এক্ষণে, P এমন একটি বিন্দু স্থাপন কর যাহার স্থানাঙ্ক (5, 25) অর্থাৎ যাহার ভূজ (5 বাছ) দ্বারা 5 বৎসর এবং কোটি (25 বাছ) দ্বারা 25 টাকা বুঝায়। এইরূপে (15, 45) ও (20, 55) স্থানাঙ্কবিশিষ্ট যথাক্রমে Q ও R

বিন্দু স্থাপন কর। RQP যোগ করিয়া বর্ধিত কর, উহা যেন  $y$ -অক্ষকে (OY-কে) A বিন্দুতে ছেদ করিল। AR সরলরেখাই উদ্দিষ্ট লেখ হইল। স্তূত্রাং লেখ হইতে দেখা যায় A বিন্দুর ভুজ=0 বাহু এবং কোটি=15 বাহু, স্তূত্রাং প্রারম্ভিক বেতন ছিল 15 টাকা।

আবার, 18 বৎসর পরের বেতন নির্ণয়ের জন্য লেখ হইতে দেখ, যে-বিন্দুর ভুজ=18 বাহু, তাহার কোটি কত। লেখটিতে দেখা যায় K বিন্দুর ভুজ=18 হইলে উহার কোটি হয় 51. অতএব 18 বৎসর চাকরির পর বেতন হইবে 51 টাকা।

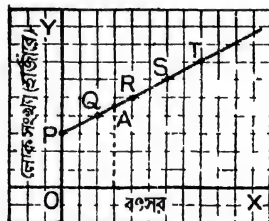
উদা. 9. The population of a certain town is given by the following table :—

Year	...	1905	1915	1925	1935	1945
Population in thousands	...	15	20	25	30	35

Read the population of the town in 1920. [Pat. U. '46]

এখানে লোকসংখ্যা সম্বন্ধে বর্ধিত হওয়ায় লেখ একটি সরলরেখা হইবে।

মনে কর,  $x$ -অক্ষস্থিত ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে 5 বৎসর এবং  $y$ -অক্ষস্থিত অনুরূপ একটি বাহুকে 5 হাজার লোকসংখ্যা ধরা হইল। 1905 সালকে প্রারম্ভিক বৎসর ধরা যাউক। P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 3) লও; উহার ভুজ=0 দ্বারা প্রারম্ভিক সাল 1905



এবং কোটি=3 দ্বারা 15(3×5) হাজার বুঝাইল। এখন যে বিন্দু 1915 সালের লোকসংখ্যা 20 হাজার নির্দেশ করিবে তাহার স্থানাঙ্ক হইবে (2, 4), কারণ উহার ভুজ 2 একক দ্বারা 10 বৎসর (1905 সালের পর) এবং কোটি 4 একক দ্বারা 20 হাজার লোক বুঝাইবে, উহাকে Q বিন্দু ধর। অনুরূপে ছক কাগজে R (4, 5), S (6, 6), T (8, 7) বিন্দুগুলি স্থাপন কর। উহাদের দ্বারা যথাক্রমে 1925, 1935, 1945 সালের লোকসংখ্যা সূচিত হইল। অতএব, PT সরলরেখাই উদ্দিষ্ট লেখ হইল। ঐ লেখ হইতে 1920 সালের

লোকসংখ্যা নির্ণয় করিবার জন্ত দেখিতে হইবে, যে বিন্দুর ভূজ=3 একক (1920-1905=15ব.=3 একক), তাহার কোটি কত। এখানে A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (3, 4½), সুতরাং উহার কোটি 4½ একক দ্বারা (5×4½) হাজার বা 22500 লোক বুঝায়।

∴ 1920 সালের লোকসংখ্যা=22500.

### Exercise 12

*Solve graphically .—*

1. (a)  $4x+3y=15$  and  $x-y=2$

(b)  $2x+3y=13$  and  $3x-2y=13$  [P. U. '24]

(c)  $\frac{3x-4}{2}=3x-\frac{1}{2}$  [P. U. '25]

(d)  $\frac{2x+4}{6}=2x-1$  (e)  $x-2=5$

*Draw the graphs of :—*

2 (i)  $x^2+y^2=36$  [C.U.'41] (ii)  $(x-2)^2+(y-1)^2=25$ .

3.  $x^2-8y+y^2-6x-24=0$  [D U. '26]

4.  $(x+1)^2+(y-3)^2=16$  5.  $x^2+y^2=48$ .

6.  $x^2+y^2=40$  7.  $y^2=4x$  [C. U. '25, '36, '40, '42]

8.  $y=(x+1)^2$  [C U. '27] 9.  $y=x^2-x-6$ .

10.  $y=4x^2$  11.  $y^2+4x=0$  [C. U. '28, '39]

12.  $5x^2-10x+9$  [C. U. '47] 13.  $x^2+y^2-2x-4y=20$

14.  $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$  [C. U. '44] 15.  $4x^2+9y^2=64$

16.  $x^2-y^2=1$  17.  $x^2-y^2=9$  18.  $xy=12$  [A. U. '16]

19.  $x^2=25$  20.  $3x^2-5xy+2y^2=0$

21. Draw the graphs of  $x^2+y^2=169$  and  $x+y=17$ ; and find the co-ordinates of their points of intersection.

[G. U. '51]



22. Draw the graphs of  $y=x^2$  and  $y=2x-1$ , and determine where they meet. [C. U. '45]

23. Trace the graphs of  $y=x$  and  $y=\frac{x^2}{4}$  and determine the points where they intersect. [E. B. S. B. '51]

24. Trace the changes in sign and magnitude of  $x^2-4x+3$  as  $x$  increases from  $-\infty$  to  $+\infty$ .

25. Draw the graphs of  $4y=x^2$  and  $2y=x+4$  between the values  $x=-4$  and  $x=4$  and find from the graphs their points of intersection. [C. U. '51]

26. Draw the graph of  $y=4x^2-3x+2$  and use it to find the minimum value of  $y$ . [E. B. S. B. '49]

27. Draw the graphs of  $x^2+y^2=25$  and  $x+y=7$ ; and measure the co-ordinates of their points of intersection. [C. U. '12; D. B. '25]

28. Draw the graph of  $2+x-2x^2$  and find from it the maximum value of the function. [D. B. '40]

29. Draw the graphs of  $y^2=8x$  and  $y=2x+1$  and indicate their common point, if any. [C. U. '50]

30. Trace the graph of  $y=x^2-6x+10$  and find the least value of  $y$ . [D. B. '24]

31. Solve graphically  $x^2-x-2=0$ . [C.U. '49; G.U. '48]

32. Solve graphically  $2x^2-5x+3=0$ . [E. B. S. B. '48]

33. Prove graphically that  $x^2-4x+5$  is positive for all real values of  $x$ .

34. Draw the graphs of  $y=x^2$  and  $y=2x+3$ . Hence solve graphically  $x^2=2x+3$ . [G. U. '49]

35. Draw the graphs of  $4y=x^2$  and  $2y=x+4$  between  $x=-4$  and  $x=+4$ , and measure the length of the chord of intersection. [G. U. '41]

36. Draw the graphs of  $y=x^2+3$  and  $y=4x$  and hence find the solution of  $x^2-4x+3=0$ . [D. B. '37]

[ Hints :  $x^2 - 4x + 3 = 0$ , বা  $x^2 + 3 = 4x$  ; সুতরাং  $y = x^2 + 3$  এবং  $y = 4x$  এই সমীকরণ দুইটির লেখদ্বয়ের ছেদবিন্দুদ্বয়ের ভূজ দুইটিই নির্ণয় বীজ। )

37. In the same diagram draw the graphs of  $2x+1$  and  $x^2$ . From your graphs read as accurately as you can the value or values of  $x$  which will make  $x^2 = 2x+1$ . [C. U. '30]

38. Draw the graphs of  $x^2 + y^2 = 16$  and  $x+y=2$  and measure the length of the chord of intersection. [C. U. '13]

39. Trace the graph of  $y = x^2 - 4x + 5$  from  $x=0$  to  $x=4$  and find the least value of  $y$ . [C. U. '18]

40. Draw the graph of  $2x^2 - 7x - 3$  between  $x=-1$  and  $x=+5$ . From your graph determine the roots of  $2x^2 - 7x + 3 = 0$ .

41. Draw the graphs of  $y = x^2 + 3x$  and  $y = -2$ . Hence find the roots of  $x^2 + 3x + 2 = 0$ . [C. U. '46]

[Hints :  $x^2 + 3x + 2 = 0$ , বা  $x^2 + 3x = -2$ , মনে কর,  $y = x^2 + 3x$  এবং  $y = -2$  ; সুতরাং এই সমীকরণের লেখ দুইটির ছেদবিন্দুদ্বয়ের ভূজ দুইটিই নির্ণয় বীজ। ]

42. Draw the graph of  $y^2 = 4x$  and prove that there is no part of the graph on the negative side of the axis of X. [C. U. '25]

43. Solve the equation  $x^2 - 6x + 8 = 0$  by drawing the graph of  $y = x^2$ . [C. U. '47]

[Hints :  $x^2 - 6x + 8 = 0$ , বা  $x^2 = 6x - 8$  ; মনে কর,  $y = x^2$ ,  $\therefore y = 6x - 8$ . এখানে  $y = x^2$  এর লেখ আঁকিতে হইবে এবং  $y = 6x - 8$  এর লেখটিও অঙ্কিত করিলে তবে প্রদত্ত সমীকরণটির সমাধান করা যাইবে।

44. Draw the graphs of  $y = x^2$  and  $x = y^2$  and find the co-ordinates of their points of intersection. [C. U. '32]

45. Draw the graph of  $x^2 + 2x + 5$  from  $x = -4$  to  $x = 2$ . Find from the graph the minimum value of the function and the value of  $x$  that gives the minimum value. [D. B. '32]

46. Draw the graph of  $x^2 + 2x + 3$  from  $x = -5$  to  $x = 3$ . Read off from the graph answers to the following questions :

(i) What is the least value of the function ? (ii) What value of  $x$  gives this least value ? (iii) For what value of  $x$  does the function take the value 4 ? [ M. U. '26 ]

47. Plot the graph of  $xy=80$  between the values  $x=\pm 20$ . [ M. U. '13 ]

*Draw the graphs of :*

48.  $y=\frac{1}{2}x^2-3$  [ M. U. '12 ]      49.  $\sqrt{x}$ .

50.  $4x^2-16x+y^2+2y-8=0$ .

51.  $9x^2-18x-16y^2-32y-151=0$ .

52. Find the co-ordinates of the point where the graph of  $3x-4y+25=0$  touches the graph of  $x^2+y^2=25$ .

53. Solve graphically the equation  $2x^2-9x-5=0$ .

[ C. U. '50 ]

54. A cyclist starts at 8 A.M. on a ride of 20 miles at 5 miles an hour. Draw a graph showing the relation between the distance travelled and the time taken to cover that distance.

55. If two oranges cost 3 annas, find graphically (1) the cost of 7 oranges and (2) how many oranges can be had for Re. 1. 5 as.

56. A man starts walking at 10 A. M. at the rate of 5 miles an hour. After 2 hours his son cycles after him at the rate of 7 miles an hour. Find graphically when and where the son will overtake the father. [ A. U. '43 ]

57. A train  $P$  starts from Howrah and runs at 30 miles an hour. Another train  $Q$  starts 20 minutes after  $P$  and runs on a parallel line at 50 miles an hour. (1) When and where will  $Q$  overtake  $P$  ? (2) How far will they be apart 12 minutes after  $Q$  starts ?

58. A walks at the rate of 4 miles an hour and takes rest for 18 minutes at the end of every hour. Two hours later  $B$  runs in the same direction at the rate of 6 miles an hour. Find graphically when and where they will meet. [N.U. '47]

59 A train starts from Howrah for Magra ( 30 miles distant) at 8-30 A.M. and travels at 40 miles an hour. Another train starts from Magra for Howrah at 8-45 A.M. and travels at 10 miles an hour. When and where do they meet ?

60. Two friends X and Y leave their places A and B respectively to meet each other. X starts at 9 A. M. and travels at 12 miles per hour, while Y starts at 11 A. M. and travels at 30 m. p. h. They meet at 12-20 P.M. Draw graphs of their travels and read from them the distance between A and B. [N. U. '48]

61. Two pipes can fill a cistern in 4 and 5 hours respectively. How long will they take to fill it if they are opened together ?

62. At noon A starts to cycle from P to Q a distance of 40 miles. He rides 6 miles an hour, resting for an hour after riding 12 miles. At 3 P. M. B starts from P at 10 miles an hour. Find graphically (a) when and where B overtakes A and (b) their distance apart at 5 P. M. [ A. U. '45 ]

63. The salary of an officer increased each year by a fixed sum. After 5 years of service his salary is raised to Rs. 120 and after 12 years to Rs. 176. Draw a graph from which his salary may be read off for any year and determine from it (i) his initial salary and (ii) the salary he should receive for his 21st year. [ D. B. '45 ]

64. The population of a town is given by the following table :

Year	1920	1930	1940	1950
Population in thousands*	12	17	22	27

Find graphically the population of the town in 1945.

65. Given that 5 kilograms are approximately equal to 11 pounds, show graphically how to express any number of kilograms in pounds. Express from the graph 7.5 pounds in kilograms and 7 kilograms in pounds.

66. Draw a graph representing the squares of the numbers from 0 to 5.

*Solve graphically :—*

67.  $x^2 + y^2 = 41$ ,  $y - 2x = -3$ .

68.  $\frac{x^2}{4} + x - 8 = 0$ .

69.  $\begin{cases} x - 2y = 8 \\ xy = 24 \end{cases}$

70.  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 73 \\ xy = 24 \end{cases}$

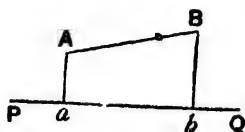
71. Draw the graphs of (i)  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ , plotting at least 8 points, and (ii)  $x + y = 5$ , plotting at least 3 points, with the same axes of co-ordinates and same scale. Show from your graph that (ii) touches (i). Write down the co-ordinates of the point of contact. [W. B. S. F. 1959]

---

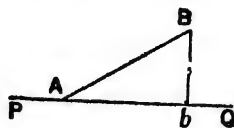
## দ্বিতীয় অধ্যায়

### জ্যামিতি

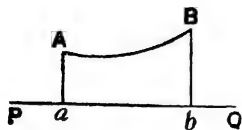
57. **অভিক্ষেপ ( Projection )** : বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর লম্বপাত করিলে ঐ লম্বটির পাদবিন্দুকে ঐ সরলরেখার উপর উক্ত বহিঃস্থ বিন্দুর **অভিক্ষেপ** বলা হয়। চিত্র 'ক'-এ বহিঃস্থ A বিন্দু হইতে PQ সরলরেখার উপর Aa লম্ব টানা হইয়াছে সুতরাং PQ সরলরেখার উপর A বিন্দুর অভিক্ষেপ হইল a বিন্দু। চিত্র 'খ'-এ A বিন্দুর অভিক্ষেপ A বিন্দুই হইবে। কারণ, A বিন্দু PQএর উপর অবস্থিত।



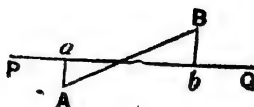
চিত্র ক



চিত্র খ



চিত্র গ



চিত্র ঘ

কোন সরলরেখার উপর অথবা কোন সরলরেখার বা বক্ররেখার অভিক্ষেপ হইতে পারে। চিত্র 'ক'-এ মনে কর, PQ সরলরেখার উপর AB সরলরেখার দুই প্রান্তবিন্দু A ও B হইতে Aa ও Bb লম্ব টানা হইল। এখানে লম্ব দুইটি দ্বারা PQএর ছিন্ন অংশ abকে PQ সরলরেখার উপর ABর লম্ব অভিক্ষেপ বলে। চিত্র 'খ'-এ PQএর উপর ABর অভিক্ষেপ Ab হইয়াছে। অতরূপে চিত্র 'গ'-এ abকে PQ সরলরেখার উপর AB বক্ররেখার লম্ব-অভিক্ষেপ বলা হয়।

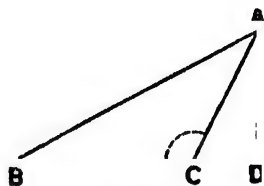
লম্ব টানিয়া অভিক্ষেপ নির্ণয় করা হয় বলিয়া ঐ অভিক্ষেপকে লম্ব-অভিক্ষেপ ( Orthogonal Projection ) বলে।

## উপপাদ্য 1

In an obtuse-angled triangle, the square on the side opposite to the obtuse angle is equal to the sum of the squares on the sides containing the obtuse angle together with twice the rectangle contained by one of those sides and the projection of the other side upon it.

[স্থলকোণী ত্রিভুজে, স্থলকোণের বিপরীত বাহুর উপর বর্গক্ষেত্র, উহার অপর দুই বাহুর উপর বর্গক্ষেত্রদ্বয় এবং ঐ দুই বাহুর যে-কোন একটি ও তাহার উপর অপর বাহুর লম্ব-অভিক্ষেপের অন্তর্গত আরতক্ষেত্রের দ্বিগুণের সমষ্টির সমান হইবে।]

ABC ত্রিভুজের  $\angle ACB$  স্থলকোণ। মনে কর, BC-র বর্ধিতাংশের উপর AD লম্ব টানা হইয়াছে। সুতরাং CD হইল BC-র উপর AC-র লম্ব-অভিক্ষেপ। এখানে স্থলকোণের বিপরীত বাহু AB এবং অপর বাহুদ্বয় BC ও AC.



১নং চিত্র

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC \cdot CD.$$

প্রমাণ :  $\because \angle D$  সন্কোণ,  $\therefore AB^2 = AD^2 + BD^2$  এবং  $AC^2 = CD^2 + AD^2$ . আবার,  $\because BD = BC + CD$ ,

$$\therefore BD^2 = (BC + CD)^2 = BC^2 + CD^2 + 2BC \cdot CD;$$

$$\therefore AB^2 = AD^2 + BD^2$$

$$= AD^2 + CD^2 + BC^2 + 2BC \cdot CD$$

$$= AC^2 + BC^2 + 2BC \cdot CD.$$

## উপপাদ্য 2

In any triangle, the square on the side opposite to an acute angle is equal to the sum of the squares on the other two sides diminished by twice the rectangle contained by

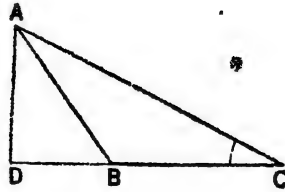
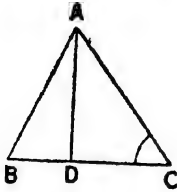
one of those sides and the projection of the other side upon it.

[ যে কোন ত্রিভুজে, কোন স্ফলকোণের বিপরীত বাহুর উপর বর্গক্ষেত্র উত্থাপন করি দুই বাহুর উপর বর্গক্ষেত্রের সমষ্টি হইতে ঐ দুই বাহুর যে কোন একটি ও তাহার উপর অপর বাহুর লম্ব-অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণের অন্তরফলের সমান হইবে। ]

ABC ত্রিভুজের  $\angle C$  স্ফলকোণ, AB উহার বিপরীত বাহু এবং অপর বাহুর BC ও AC. মনে কর, BC-র উপর (প্রথম চিত্র) বা CB-র বর্ধিতাংশের উপর (দ্বিতীয় চিত্র) AD লম্ব টানা হইয়াছে, সুতরাং CD হইল BC-র উপর AC-র লম্ব অভিক্ষেপ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot CD.$$



২নং চিত্র

প্রমাণ :  $\because \angle D$  সমকোণ,  $\therefore AB^2 = AD^2 + BD^2$  এবং  $AC^2 = AD^2 + CD^2$ .

আবার,  $BD = BC - CD$ , অথবা  $BD = CD - BC$ ,

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD.$$

$$\therefore AB^2 = AD^2 + BD^2$$

$$= AD^2 + CD^2 + BC^2 - 2BC \cdot CD$$

$$= AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot CD. \quad \text{প্র. ১. ৬৭}$$

[ উল্লেখ্য : কোন ত্রিভুজে  $\angle C$  সমকোণ হইলে  $AB^2 = AC^2 + BC^2$ ,  
 $\angle C$  স্ফলকোণ হইলে  $AB^2 > AC^2 + BC^2$ ,  
 $\angle C$  স্ফলকোণ হইলে  $AB^2 < AC^2 + BC^2$ . ]



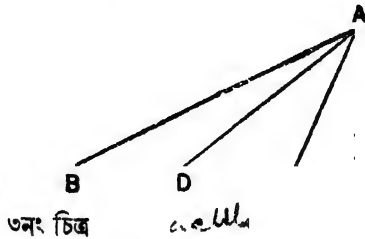
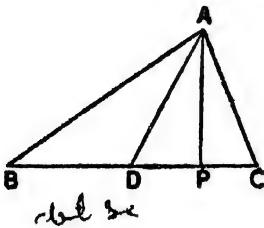
## জ্যামিতি

### Apollonius' Theorem

In any triangle, the sum of the squares on two sides is equal to twice the square on half the third side together with twice the square on the median that bisects the third side.

ABC ত্রিভুজের AD মধ্যমা BC বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,  $AB^2 + AC^2 = 2BD^2 + 2AD^2$ .



অঙ্কন : BC-র বা BC-র বর্ধিতাংশের উপর AP লম্ব টান।

প্রমাণ : মনে কর, AB ও AC অসমান, সুতরাং ADB ও ADC কোণ দুইটির মধ্যে একটি স্থূলকোণ এবং অপরটি সূক্ষ্মকোণ হইবে।

এখানে  $\angle ADB$  স্থূলকোণ,

$$\therefore \triangle ABD \text{ এ, } AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD \cdot PD$$

$$\text{এবং } \triangle ADC \text{ এ, } AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2CD \cdot PD$$

$$= AD^2 + BD^2 - 2BD \cdot PD \quad (\because CD = BD)$$

$$\therefore AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2BD^2.$$

### বিবিধ সমাধান (1)

উদা. 1. Prove that a triangle whose sides are 2, 3 and 4 inches is an obtuse-angled triangle. [ C. U. '33 ]

স্থূলকোণী ত্রিভুজের স্থূলকোণের সম্মুখীন বাহুই বৃহত্তম বাহু এবং ঐ বৃহত্তম বাহুর বর্গ অন্ত দুই বাহুর উপর বর্গদ্বয়ের সমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর হয়। এখানেও দেখা যাইতেছে যে  $4^2 = 16$  এবং  $3^2 + 2^2 = 13$  অর্থাৎ  $4^2 > (3^2 + 2^2)$ .

$\therefore$  4 ইঞ্চি বাহুর বিপরীত কোণটি স্থূলকোণ হইবে।

অতএব ত্রিভুজটি স্থূলকোণী।

উদা. 2. Prove that in an isosceles triangle of which the vertical angle is  $120^\circ$ , the square on the base is three times the square on either side. [C. U. 1916]

ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের  $AB=AC$  এবং  $\angle A=120^\circ$ । প্রমাণ করিতে হইবে যে,  $BC^2=3AB^2$ । C হইতে BA-র বর্ধিতাংশের উপর CD লম্ব টান। AD, BA-র উপর AC-র লম্ব অভিক্ষেপ হইল।

প্রমাণ :  $BC^2=AB^2+AC^2+2AB.AD$  ( $\because \angle BAC$  স্থূলকোণ)  
 $=2AB^2+2AB.AD$ । এখন,  $\triangle ADC$ র,  $\angle D$  সমকোণ এবং  $\angle CAD=180^\circ-120^\circ=60^\circ$ ,  $\therefore \angle ACD=30^\circ$ ,  $\therefore AD=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}AB$ ।  
 $\therefore BC^2=2AB^2+2AB.AD=2AB^2+2AB.\frac{1}{2}AB=2AB^2+AB^2=3AB^2$ ।

উদা. 3.<sup>o</sup> If DE is drawn parallel to the base BC of an isosceles  $\triangle ABC$ , prove that the difference of the squares on BE and CE is equal to the rectangle contained by BC and DE. [C. U. 1938]

$\triangle ABC$ র  $AB=AC$  এবং  $DE \parallel BC$ । প্রমাণ করিতে হইবে যে,  $BE^2-CE^2=BC.DE$ । D ও E হইতে BCর উপর DP ও ER লম্ব টান।

প্রমাণ : DERP একটি সামান্তরিক।  $\therefore DP=ER$  এবং  $DE=PR$ ।  
 $\triangle DBP$  ও  $\triangle ERC$ র  $\angle P=\angle R$ ,  $\angle B=\angle C$  এবং  $DP=ER$ ,  $\therefore PB=RC$ ।  
 এখন  $\triangle BEC$ র  $\angle C$  সূক্ষ্মকোণ বলিয়া  $BE^2=BC^2+CE^2-2BC.CR$ ।

$$\therefore BE^2-CE^2=BC^2-2BC.CR=BC(BC-2CR)$$

$$=BC(BC-CR-BP)=BC.PR=BC.DE$$

উদা. 4.<sup>o</sup> In a  $\triangle ABC$ , AD is perpendicular drawn to the base BC and O is the middle point of BC. Prove that the difference  $AB^2-AC^2=2BC.OD$ . [C.U. '30, '46, '51, D.B. '41]

Hints :  $\angle AOB > \angle D$ , সূত্রাং

উহা স্থূলকোণ এবং  $\angle AOC$  সূক্ষ্মকোণ।

এখন  $AB^2=AO^2+BO^2+2BO.OD \dots (1)$

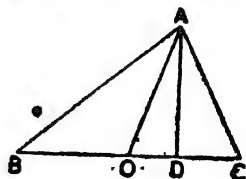
$\triangle AOC$ র,  $AC^2=AO^2+CO^2-2CO.OD$

$$=AO^2+BO^2-2BO.OD$$

$$(\because BO=CO) \dots (2)$$

একপে (1) হইতে (2) বিয়োগ করিলে

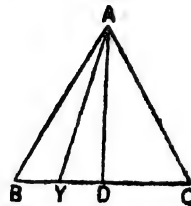
$$AB^2-AC^2=4BO.OD=2.(2BO).OD=2BC.OD (\because 2BO=BC.)$$



৪নং চিত্র

উদা. 5.<sup>o</sup> ABC is an isosceles triangle and AY is drawn to cut the base internally at Y. Show that  $AY^2 = AB^2 - BY \cdot YC$ . [ C. U. 1919, '47 ]

A হইতে BCর উপর AD লম্ব টান।  $\triangle ABC$  সমদ্বিবাহু বলিয়া লম্ব AD, ভূমি BCকে সমদ্বিখণ্ডিত করিল। এখন  $\angle D$  সমকোণ বলিয়া  $\angle B$  সমকোণ।  $\therefore$  BD, ABর লম্ব অভিক্ষেপ,  
 $\therefore AY^2 = AB^2 + BY^2 - 2BY \cdot BD$   
 $= AB^2 - BY(2BD - BY)$



$$= AB^2 - BY(BC - BY) = AB^2 - BY \cdot YC. \quad \text{এং চিত্র}$$

উদা. 6. The sum of the squares on the sides of a parallelogram is equal to the sum of the squares on its diagonals. [ C. U. 1931 ]

মনে কর, ABCD সামান্তরিকের AC ও BD কর্ণদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,  $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$ .

প্রমাণঃ  $\therefore$  সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমদ্বিখণ্ডিত হয়,  $\therefore AO = CO$ ,  $BO = DO$ . এখন  $\triangle ABC$ তে  $AB^2 + BC^2 = 2AO^2 + 2BO^2$ , এবং  $\triangle ADC$ তে,  $AD^2 + CD^2 = 2AO^2 + 2DO^2$ .  $\therefore AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 4AO^2 + 2BO^2 + 2DO^2 = 4AO^2 + 4DO^2$  ( $\because BO = DO$ )  
 $= (2AO)^2 + (2DO)^2 = AC^2 + BD^2$ .

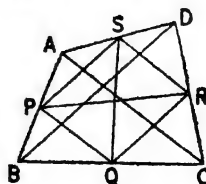
উদা. 7.<sup>o</sup> In any quadrilateral the sum of the squares on the diagonals is equal to twice the sum of the squares on the joins of the middle points of the opposite sides.

P, Q, R, S যথাক্রমে ABCD চতুর্ভুজের AB, BC, CD, DA বাহুর মধ্যবিন্দু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$AC^2 + BD^2 = 2(PR^2 + QS^2).$$

প্রমাণঃ AC, PR, QS, PQ, QR, RS, SP যোগ কর।  $\triangle ABC$ র AB ও BC বাহুর মধ্যবিন্দু P ও Q  $\therefore AC = 2PQ$ .



এং চিত্র

$\therefore AC^2 = 4PQ^2$ . অনুরূপে  $BD^2 = 4PS^2$ . আবার, PQRS একটি সামান্তরিক,

$\therefore PR^2 + QS^2 = PQ^2 + QR^2 + RS^2 + SP^2 = 2PQ^2 + 2PS^2$ . অতএব,  
 $AC^2 + BD^2 = 4PQ^2 + 4PS^2 = 2(2PQ^2 + 2PS^2) = 2(PR^2 + QS^2)$ .

উদা. ৪. Prove that the sum of the squares on the sides of a quadrilateral is equal to the sum of the squares on its diagonals together with four times the square on the line joining the middle points of the diagonals. [ C. U. 1924 ]

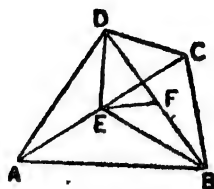
ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও F. প্রমাণ করিতে হইবে  $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4EF^2$ .

EF, EB, ED যোগ কর।

প্রমাণ : ABC ত্রিভুজে BE মধ্যমা,  
 $\therefore AB^2 + BC^2 = 2AE^2 + 2BE^2$ . অতরূপে  
 ADC ত্রিভুজে  $AD^2 + DC^2 = 2AE^2 + 2DE^2$ .

আবার EF, ত্রিভুজ EBDর মধ্যমা  
 বলিয়া  $EB^2 + ED^2 = 2BF^2 + 2EF^2$

$$\begin{aligned} \therefore AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 &= \\ 2AE^2 + 2BE^2 + 2AE^2 + 2DE^2 &= 4AE^2 \\ + 2(BE^2 + DE^2) &= 4AE^2 + 2(2BF^2 + 2EF^2) = 4AE^2 + 4BF^2 + 4EF^2 \\ &= (2AE)^2 + (2BF)^2 + 4EF^2 = AC^2 + BD^2 + 4EF^2. \end{aligned}$$



৭নং চিত্র

উদা. ৯. Three times the sum of the squares on the sides of a triangle is equal to four times the sum of the squares on the medians. [ C. U. '33, '37 ]

$\triangle ABC$ র AD, BE ও CF তিনটি মধ্যমা। প্রমাণ করিতে হইবে যে,  
 $3(AB^2 + BC^2 + AC^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$ .

প্রমাণ : AD মধ্যমা বলিয়া  $AB^2 + AC^2 = 2BD^2 + 2AD^2$

অতরূপে,  $AB^2 + BC^2 = 2CE^2 + 2BE^2$

এবং  $BC^2 + AC^2 = 2AF^2 + 2CF^2$

$$\begin{aligned} (\text{যোগ করিয়া}) \quad 2(AB^2 + BC^2 + AC^2) &= 2BD^2 + 2CE^2 + \\ 2AF^2 + 2(AD^2 + BE^2 + CF^2), \therefore 4(AB^2 + BC^2 + AC^2) &= 4BD^2 + \\ 4CE^2 + 4AF^2 + 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) &= (2BD)^2 + (2CE)^2 + (2AF)^2 + \\ 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) &= BC^2 + AC^2 + AB^2 + 4(AD^2 + BE^2 + CF^2). \end{aligned}$$

$$\therefore 3(AB^2 + BC^2 + AC^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2).$$

উদা. 10.<sup>o</sup> If G be the centroid (মধ্যমাজের ছেদবিন্দু) of the  $\triangle ABC$ , show that  $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$ .

[9নং উদাহরণ অনুসারে]  $3(AB^2 + BC^2 + AC^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$   
 $= 4\left\{\left(\frac{3}{4}AG\right)^2 + \left(\frac{3}{4}BG\right)^2 + \left(\frac{3}{4}CG\right)^2\right\}$  [∵ মধ্যমাজের সমত্রিখণ্ডক বিন্দুতে ছেদ করে]  
 $= 4\left(\frac{9}{4}AG^2 + \frac{9}{4}BG^2 + \frac{9}{4}CG^2\right) = 9(AG^2 + BG^2 + CG^2)$ .

∴ উভয় পক্ষকে 3 দিয়া ভাগ করিয়া পাই

$$AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$$

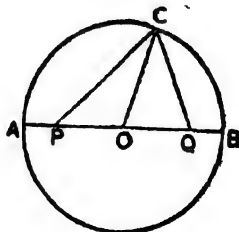
উদা. 11.<sup>o</sup> ABCD is a rectangle and P any point within it. Prove that  $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$ . [C. U. '27]

[Hints : মনে কর, AC, BD কর্ণের O বিন্দুতে ছেদ করিল। আরও-  
 কেন্দ্রের কর্ণের সমান এবং পরস্পর সমাধিকণ্ডিত হয়। ∴  $AO = DO$ ,  
 $PO, AP, PC, BP, DP$  যোগ কর।  $\triangle APC$  ত্রিভুজে  $AP^2 + PC^2$   
 $= 2AO^2 + 2PO^2$ ; আবার,  $\triangle PDB$ তে  $PB^2 + PD^2 = 2DO^2 + 2PO^2$   
 $= 2AO^2 + 2PO^2$  (∵  $AO = DO$ ), ∴  $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$ ].

উদা. 12. P and Q are two pts. on the diameter AB of a circle, equidistant from the centre ; if C is any point on the circumference, show that  $PC^2 + QC^2 = AP^2 + AQ^2$ .

[Hints : ∵  $PO = QO$ , ∴ CO,  $\triangle PCQ$ এর মধ্যমা। ∴  $PC^2 + QC^2$   
 $= 2CO^2 + 2PO^2 = 2AO^2 + 2PO^2$   
 (∵  $AO = CO$ ). আবার,  $AP^2 + AQ^2$   
 $= (AO - PO)^2 + (AO + OQ)^2$   
 $= (AO - PO)^2 + (AO + PO)^2$   
 $= AO^2 + PO^2 - 2AO \cdot PO + AO^2 + PO^2$   
 $+ 2AO \cdot PO = 2AO^2 + 2PO^2$ .

∴  $PC^2 + QC^2 = AP^2 + AQ^2$ .]



৮নং চিত্র

### Exercise 1

1. If a straight line is bisected, prove that its projection is also bisected.

2. The projections of two equal and parallel st. lines on the same st. line are equal.

3. In a  $\triangle ABC$ , AD is drawn perpendicular to BC ; if  $AD^2 = BD \cdot CD$ , prove that  $\angle BAC$  is a right angle. [B.U. '14]

[ Hints :  $AB^2 + AC^2 = BD^2 + AD^2 + CD^2 + AD^2$  ('.'  $\angle D$  সমকোণ)  
 $= BD^2 + CD^2 + 2AD^2 = BD^2 + CD^2 + 2BD \cdot CD$   
 $= (BD + CD)^2 = BC^2$ ,  $\therefore \angle BAC$  সমকোণ। ]

4. The  $\angle ACB$  of the  $\triangle ABC$  is  $120^\circ$ ,

show that  $AB^2 = AC^2 + BC^2 + AC \cdot BC$ .

5. A point moves so that the sum of the squares on its distances from two fixed points is constant. Find the locus of the point.

6. A straight line AB is bisected at C and produced to D. Prove that  $AD^2 - BD^2 = 4AC \cdot CD$ .

7. In  $\triangle ABC$ , if  $AB = AC$  and BD is perpendicular to AC, show that  $BC^2 = 2AC \cdot CD$ .

✓ 8. Calculate the base of a triangle whose sides are 4 and 5 inches and whose median is 3.5 inches. [ Ans. 5.7 ই. ]

✓ 9. Prove that the area of the triangle ABC is  $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$  where  $2s = a + b + c$ .

## অনুপাত ও সমানুপাত ( Ratio and Proportion )

58. অনুপাত ( Ratio )।

একই জাতীয় দুইটি বস্তুর মধ্যে একটি অপরটির কতগুণ বা কত অংশ তাহা যে সংখ্যা দ্বারা প্রকাশ করা যায়, তাহাকে ঐ বস্তু দুইটির অনুপাত বলে।

মনে কর, 6 ইঞ্চি ও 4 ইঞ্চি মাপের দুইটি সরলরেখা আছে। উহাদের দৈর্ঘ্যের অনুপাত  $\frac{6}{4}$  অর্থাৎ  $\frac{3}{2}$  এই ভগ্নাংশ দ্বারা প্রকাশ করা যায়। এইরূপ দুইটি একজাতীয় বস্তুর পরিমাণ  $a$  ও  $b$  একক হইলে উহাদের অনুপাত  $\frac{a}{b}$  হইবে। এই অনুপাত লিখিতে হইলে  $\frac{a}{b}$  অথবা  $a : b$  এই ভাবে লেখা হয়।

$a : b$  এই অনুপাতের প্রথম রাশি  $a$ -কে পূর্ব রাশি (antecedent) এবং দ্বিতীয় রাশি  $b$ -কে উত্তর রাশি (consequent) বলে।

**উদাহরণ :** (1) দুইটি বস্তু একজাতীয় না হইলে তাহাদের অনুপাত নির্ণয় করা যায় না। যথা—দৈর্ঘ্যের সহিত ওজনের বা কোণের তুলনা অর্থাৎ অনুপাত হয় না। (2) অনুপাতটি একটি ভগ্নাংশ হইবে। যথা, 6 ইঞ্চি ও 4 ইঞ্চির অনুপাত হইবে  $\frac{6}{4}$  বা  $\frac{3}{2}$ , কিন্তু  $\frac{2}{3}$  ইঞ্চি নহে।

### 59. প্রমেন্স ও অমেন্স মান।

যে সকল রাশি কোন নির্দিষ্ট এককের গুণিতক তাহাদিগকে প্রমেন্স (commensurable) বলে।

যদি দুইটি রাশিকে কোন একটি এককের দ্বারা পূর্ণরূপে মাপা যায়, তবে তাহারা প্রমেন্স এবং তাহাদের অনুপাত দুইটি পূর্ণসংখ্যার অনুপাত হয়।

জ্যামিতিক অনুপাত সর্বদা উক্তরূপ হয় না। মনে কর, একটি বর্গক্ষেত্রের বাহু এক ইঞ্চি, সুতরাং উহার কর্ণ  $\sqrt{2}$  ইঞ্চি হইবে। এখন দেখ  $\sqrt{2}$  সংখ্যাটি কোন নির্দিষ্ট পূর্ণসংখ্যা বা ভগ্নাংশ দ্বারা ভাগ করা যায় না। এইরূপ মানকে অমেন্স (incommensurable) বলে।

### 60. সমানুপাত (Proportion)।

$a, b, c$  ও  $d$  এই রাশি চারিটি যদি একরূপ হয় যে,  $a$  ও  $b$ র অনুপাত  $c$  ও  $d$ র অনুপাতের সমান (অর্থাৎ  $a : b = c : d$ ), তাহা হইলে ঐ চারিটি রাশিকে সমানুপাতী (proportional) বলে এবং ঐ অনুপাত দুইটিকে সমানুপাত বলে। এই সমানুপাতকে  $a : b = c : d$  কিংবা  $a : b :: c : d$  এইভাবে লেখা যায়।

এইরূপে যদি  $a : b = b : c$  হয়, তবে  $a, b, c$ কে সমানুপাতী বলা যাইবে।  $a, b, c$  ও  $d$  সমানুপাতী হইলে দুই প্রান্তের রাশি দুইটিকে অর্থাৎ  $a$  ও  $d$ কে প্রান্তীয় (extremes) এবং মধ্যের রাশি দুইটিকে অর্থাৎ  $b$  ও  $c$ কে মধ্যক (means) বলে। আবার চতুর্থ রাশিকে প্রথম তিনটির চতুর্থ সমানুপাতী (fourth proportional) বলে।

$a, b, c$  সমানুপাতী হইলে, দ্বিতীয় রাশি  $b$ কে (অর্থাৎ মধ্যের রাশিকে) প্রথম ও তৃতীয় রাশির মধ্য সমানুপাতী (mean proportional) বলে এবং  $b^2 = ac$  হয়। এখানে  $c$ কে তৃতীয় সমানুপাতী (third proportional) বলা যায়।

**দ্রষ্টব্য :** সমানুপাতী রাশি চারিটির মধ্যে সবগুলি সমজাতীয় হইতে পারে, অথবা প্রথম দুইটি একজাতীয় এবং শেষ দুইটি অন্য প্রকারের সমজাতীয় হইতে পারে। যথা, 12 ইঞ্চি : 6 ইঞ্চি = 2 : 1, এবং 4 সের : 2 সের = 2 : 1, সুতরাং 12 ইঞ্চি : 6 ইঞ্চি = 4 সের : 2 সের।

∴ 12 ই., 6 ই., 4 সের ও 2 সের সমানুপাতী।

61. অনুপাত সম্বন্ধীয় কতকগুলি প্রক্রিয়া।

(1) একান্তর প্রক্রিয়া ( Alternendo ) :

যদি  $a : b = c : d$  হয়, তবে  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$  হইবে।

(2) বিপরীত প্রক্রিয়া ( Invertendo ) :

$a : b = c : d$  হইলে,  $b : a = d : c$  হইবে।

(3) যোগ প্রক্রিয়া ( Componendo ) :

$a : b = c : d$  হইলে,  $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$  হইবে।

(4) ভাগ প্রক্রিয়া ( Dividendo ) :

$a : b = c : d$  হইলে,  $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$  হইবে।

(5) যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া ( Componendo & Dividendo ) :

$a : b = c : d$  হইলে,  $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$  হইবে।

(6) সংযোজন প্রক্রিয়া ( Addendo ) :

$a : b = c : d = e : f = \dots$  হইলে, প্রত্যেক অনুপাতটি  $= \frac{a+c+e+\dots}{b+d+f+\dots}$  হইবে।

(7) বক্স গুণন প্রক্রিয়া ( Cross multiplication ) :

$a : b = c : d$  হইলে,  $ad = bc$  হইবে।

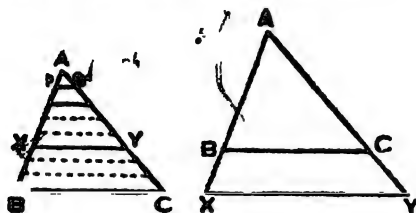


## উপপাত্ত ৩

A straight line drawn parallel to one side of a triangle cuts the other two sides, or those sides produced, proportionally.

[ কোন ত্রিভুজের একটি বাহুর সমান্তরাল করিয়া অঙ্কিত সরলরেখা ত্রিভুজের অপর বাহুদ্বয়কে সমানুপাতে বিভক্ত করে। ]

[ C. U. '42, '43, '45, '47, '48 ; D. B. '39, '41 ; G. U. '49, '51 ]



৯নং চিত্র

**স্বীকার :** মনে কব,  $\triangle ABC$ তে  $BC$  বাহুর সমান্তরাল  $XY$  রেখা  $AB$  ও  $AC$ কে কিংবা  $AB$  ও  $AC$ র বর্ধিত অংশকে যথাক্রমে  $X$  ও  $Y$  বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে,  $AX : BX = AY : CY$ .

**প্রমাণ :** মনে কর,  $AX$  ও  $BX$  প্রমের এবং উভয়কে সাধারণ দৈর্ঘ্য  $p$  দ্বাৰা মাপা যায়, সুতরাং মনে কর,  $AX = m.p$  এবং  $BX = n.p$ .

$$\therefore \frac{AX}{BX} = \frac{mp}{np} = \frac{m}{n}.$$

এক্ষে,  $AX$  ও  $BX$ কে  $p$  দৈর্ঘ্যের সমান যথাক্রমে  $m$  ও  $n$  সংখ্যক অংশে ছেদ করে। প্রত্যেক ছেদবিন্দু হইতে  $BC$ র সমান্তরাল করিয়া সরলরেখা টান। তাহা হইলে উহারা  $AY$  ও  $YC$ কে যথাক্রমে  $m$  ও  $n$  সংখ্যক সমান অংশে বিভক্ত করিবে। মনে কর, এই সমান অংশগুলি  $q$  দৈর্ঘ্য এককের সমান।

সুতরাং  $\frac{AY}{YC} = \frac{m.q}{n.q} = \frac{m}{n}$  হইবে। অতএব,  $\frac{AX}{BX} = \frac{AY}{CY}$ .

[ অভুলিকান্ত :  $\therefore \frac{AX}{BX} = \frac{AY}{CY}, \therefore \frac{AX + BX}{BX} = \frac{AY + CY}{CY}$

বা,  $\frac{AB}{BX} = \frac{AC}{CY}$ . অতঃপরে,  $\frac{AB}{AX} = \frac{AC}{AY}$  এবং  $\frac{BX}{AX} = \frac{CY}{AY}$ . ]

উপপাদ্য ৪

If a straight line cuts two sides of a triangle proportionally, it is parallel to the third side.

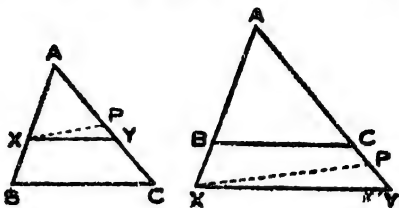
[ যদি কোন সরলরেখা একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহুকে সমানুপাতে বিভক্ত করে, তবে সেই সরলরেখা ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল হইবে। ]

মনে কর, ABC ত্রিভুজে XY রেখা AB ও ACকে X ও Y বিন্দুতে একপে ছেদ করিয়াছে যে,

$$AX : XB = AY : YC.$$

প্রমাণ করিতে হইবে যে,  
 $XY \parallel BC.$

প্রমাণঃ যদি XY রেখা BCর সমান্তরাল স্বীকার না করা হয়, তবে মনে কর  $XP \parallel BC$  টানা হইল এবং উহা ACকে P বিন্দুতে ছেদ করিল।



১০নং চিত্র

$$\therefore XP \parallel BC, \therefore \frac{AX}{BX} = \frac{AP}{PC},$$

$$\text{কিন্তু } \frac{AX}{BX} = \frac{AY}{YC} \text{ (স্বীকার)}, \therefore \frac{AP}{PC} = \frac{AY}{YC},$$

সুতরাং দেখা যাইতেছে যে, AC রেখা P ও Y এই দুইটি বিভিন্ন বিন্দুতে একই অনুপাতে বিভক্ত হইয়াছে ; কিন্তু ইহা অসম্ভব।

$\therefore P$  ও  $Y$  একই বিন্দু হইবে।  $\therefore XY$  ও  $BC$  সমান্তরাল।

$$\left[ \text{দ্রষ্টব্যঃ উপরের প্রমাণে দেখ, } \frac{AP}{PC} = \frac{AY}{YC},$$

$$\therefore \frac{AP+PC}{PC} = \frac{AY+YC}{YC} \text{ (১ম চিত্রে যোগক্রিয়া দ্বারা) } \therefore \frac{AC}{PC} = \frac{AC}{YC},$$

$\therefore PC=YC, \therefore P$  ও  $Y$  একই বিন্দু হইতে হইবে। আবার ২য় চিত্রে ভাগক্রিয়া দ্বারা  $\frac{AP-PC}{PC} = \frac{AY-YC}{YC}$  করিয়াও ঐ সিদ্ধান্ত পাওয়া যায়। ]

অনুসিদ্ধান্তঃ যদি  $\frac{AX}{BX} = \frac{AY}{CY}$  হয়, অথবা যদি  $\frac{AB}{BX} = \frac{AC}{CY}$  হয়, কিংবা

যদি  $\frac{AB}{AX} = \frac{AC}{AY}$  হয়, তবে  $XY \parallel BC$  হইবে।

## বিবিধ সমাধান (2)

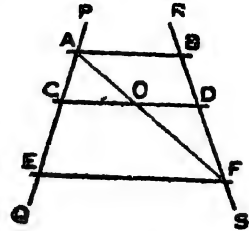
উদা. 1° Prove that three parallel straight lines cut any two transversals proportionally.

[C. U. '15, '26, '39, '40 ; G. U. '49]

মনে কর, AB, CD ও EF সমান্তরাল সরলরেখা তিনটি PQ ভেদক হইতে AC ও CE অংশদ্বয় এবং RS ভেদক হইতে BD ও DF অংশদ্বয় ছিন্ন করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,  $\frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DF}$ .

AF যোগ কর; উহা CDকে যেন O বিন্দুতে ছেদ করিল।



১১নং চিত্র

প্রমাণ:  $\triangle AEF$  এ  $\because CO \parallel EF$ ,  $\therefore \frac{AC}{CE} = \frac{AO}{OF}$ .

আবার,  $\triangle ABF$  এ,  $\because OD \parallel AB$ ,  $\therefore \frac{AO}{OF} = \frac{BD}{DF}$ .

অতএব  $\frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DF}$ .

উদা. 2. Show that the straight line drawn through the middle point of one side of a triangle parallel to the base bisects the other side. [C. U. '23]

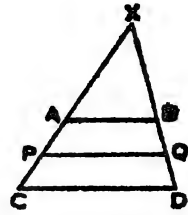
মনে কর, ABC ত্রিভুজের AB বাহুর মধ্যবিন্দু X হইতে  $XY \parallel BC$  টানা হইল। XY, ACকে Y বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ করিতে হইবে যে,  $AY = CY$ .

প্রমাণ:  $\because XY \parallel BC$ ,  $\therefore \frac{AX}{BX} = \frac{AY}{CY}$ , কিন্তু  $AX = BX$  (স্বীকার)

$\therefore AY = CY$ .

উদা. 3. Show that the straight line which joins the middle points of the oblique sides of a trapezium is parallel to the parallel sides. [D. B. '37, '41, '44]

মনে কর,  $ABDC$  ট্রাপিজিয়মের  $AC$  ও  $BD$  তির্যক বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু  $P$  ও  $Q$  যোগ করা হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে,  $PQ$  রেখা  $AB$  ও  $CD$ র সমান্তরাল।  $CA$  ও  $DB$ কে বর্ধিত করিয়া  $X$  বিন্দুতে ছেদ করান হইল।



১২নং চিত্র

প্রমাণ :  $\triangle XCD$ র  $AB$   $CD$ ,

$$\frac{XA}{AC} = \frac{XB}{BD} \text{ বা } \frac{XA}{2AP} = \frac{XB}{2BQ} \text{ বা } \frac{XA}{AP} = \frac{XB}{BQ} \therefore AB \parallel PQ.$$

আবার,  $\therefore AB \parallel CD$ ,  $\therefore PQ \parallel CD$ ,  $\therefore PQ \parallel AB$  ও  $CD$ .

উদা. 4.<sup>o</sup> In any triangle  $ABC$ ,  $AB$  is bisected in  $D$  and  $CD$  is bisected in  $E$ . If  $AE$  is produced to meet  $BC$  in  $F$ , prove that  $FC = \frac{1}{3}BC$ . [D. B. '39]

$AB$  বাহুর মধ্যবিন্দু  $D$  এবং  $CD$ র মধ্যবিন্দু  $E$ , বর্ধিত  $AE$  রেখা  $BC$ কে  $F$  বিন্দুতে ছেদ করিল।  $DR \parallel AF$  টান, উহা  $BC$ কে  $R$  বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ করিতে হইবে  $FC = \frac{1}{3}BC$ .

প্রমাণ :  $\triangle ABF$ এর  $DR \parallel AF$ ,

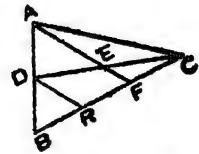
$$\therefore \frac{BD}{DA} = \frac{BR}{RF}, \text{ কিন্তু } DB = DA,$$

$$\therefore BR = RF.$$

আবার,  $\triangle CDR$ এর  $EF \parallel DR$ ,

$$\therefore CE : DE = CF : RF,$$

কিন্তু  $CE = DE$ ,  $\therefore CF = RF$ .  $\therefore CF = RF = BR$ ,  $\therefore FC = \frac{1}{3}BC$ .



১৩নং চিত্র

উদা. 5. Show how to divide a given straight line into three equal parts. [C. U. '29]

[Hints : মনে কর,  $AB$  সরলরেখাকে সমান তিন অংশে বিভক্ত করিতে হইবে।  $AB$ র সহিত যে কোন কোণ করিয়া  $AX$  সরলরেখা টান এবং  $AX$  হইতে যে-কোন তিনটি সমান অংশ  $AP$ ,  $PQ$ ,  $QR$  কাটিয়া লও।  $RB$  যোগ করিয়া  $P$  ও  $Q$  বিন্দু হইতে  $RB$ র সমান্তরাল করিয়া সরলরেখা টান। উহারা যেন,  $AB$ কে যথাক্রমে  $C$  ও  $D$  বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন  $AB$ ,  $C$  ও  $D$

বিন্দুতে সমত্রিখণ্ডিত হইল।  $\therefore PC \parallel RB$ ,  $\therefore AC : AB = AP : AR = \frac{1}{3}$ ,  
 $\therefore AC = \frac{1}{3}AB$ . অনুরূপে  $CD$  ও  $DB$  প্রত্যেকে  $\frac{1}{3}AB$  হইবে।]

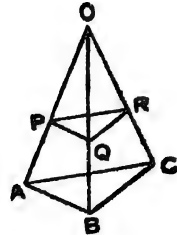
উদা. 6. In three straight lines OPA, OQB, ORC the points are so chosen that PQ is parallel to AB, QR is parallel to BC, neither P, Q, R nor A, B, C are collinear. Prove that PR is parallel to AC. [C. U. '47]

[যাহা দেওয়া আছে এবং কি প্রমাণ করিতে হইবে তাহা আগে লিখিবে]

এখানে  $\therefore PQ \parallel AB$ ,  $\therefore \frac{OP}{AP} = \frac{OQ}{BQ}$ .

আবার,  $\therefore QR \parallel BC$ ,  $\therefore \frac{OQ}{BQ} = \frac{OR}{CR}$ .

$\therefore \frac{OP}{AP} = \frac{OR}{CR}$ .



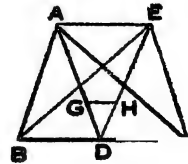
১৪নং চিত্র

এক্ষে,  $\triangle OAC$ তে  $\therefore \frac{OP}{AP} = \frac{OR}{CR}$ ,  $\therefore PR \parallel AC$ .

উদা. 7. Find the locus of the centroid of a triangle standing on a given base and having a given area.

[C. U. '34, '42, '43, '45]

মনে কর,  $\triangle ABC$ র ভূমি  $BC$  প্রদত্ত নির্দিষ্ট ভূমির সমান এবং উহার ক্ষেত্রফল প্রদত্ত ক্ষেত্রফলের সমান।  $AD$  ঐ ত্রিভুজের একটি মধ্যমা। ও  $G$  উহার ভরকেন্দ্র।  $G$  বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।



১৫নং চিত্র

মনে কর,  $\triangle ABC$ র সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট অন্য একটি  $\triangle EBC$  একই  $BC$  ভূমির উপর একই পাশে অবস্থিত এবং উহার ভরকেন্দ্র  $H$ ;  $GH$  ও  $AE$  যোগ কর।

$\therefore$  একই ভূমির উপর  $\triangle ABC$  ও  $\triangle EBC$  সমান,  $\therefore AE \parallel BC$ .

আবার,  $\therefore$  ভরকেন্দ্রে প্রত্যেক মধ্যমা সমত্রিখণ্ডিত হয়,  $\therefore \frac{DG}{DA} = \frac{1}{3}$

এবং  $\frac{DH}{DE} = \frac{1}{3}$ ,  $\therefore \frac{DG}{DA} = \frac{DH}{DE}$ ,  $\therefore GH \parallel AE$ ,  $\therefore GH \parallel BC$ .

অতএব,  $\triangle ABC$ র A বিন্দুর যে কোন অবস্থানে ভবকেন্দ্র O বিন্দু GH সরলরেখার উপর থাকিবে। O বিন্দুর মধ্য দিয়া BCর সমান্তরাল সরলরেখাই O বিন্দুর সঞ্চারপথ।

**উদা ৪** OPQ is a straight line drawn to a fixed point O and is such that  $OP : OQ$  is constant. If P moves along a fixed straight line and the locus of Q

মনে কর O এক নির্দিষ্ট স্থরিন্দুতে OPQ সরলরেখা একপে টানা হইয়াছে যে,  $OP : OQ$  ধ্রুব। যদি P বিন্দু সরলরেখা PX এই নির্দিষ্ট সরলরেখা উপর বিচরণ করে, তবে Q বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

O বিন্দু দিয়া QY  $\parallel$  PX টান মনে কর, PX রেখার A বিন্দু P র একটি অবস্থান OA যোগ কর য বিন্দু এর উচ্চা যেন QYকে B বিন্দুতে ছেদ করিবে।

এক্ষণে,  $P \parallel QB$ ,

$\therefore OA : OB = OP : OQ$  - ধ্রুব।

১৬নং চিত্র

অতএব, P বিন্দু অবস্থান A বিন্দুতে হইলে, তখন Q বিন্দুর অবস্থান QY-এর উপর B বিন্দুতে হইবে।  $\therefore$  O বিন্দু দিয়া অঙ্কিত PX-এব সমান্তরাল সরলরেখাই O বিন্দুর সঞ্চারপথ।

১৬নং চিত্র

### Exercise 2

1. In  $\triangle ABC$ , PQ is drawn parallel to BC cutting the other sides produced at P and Q. If  $AB = 42$  cm,  $AC = 36$  cm and  $AP = 63$  cm, find the length of AQ [উঃ = 54 cm]

2. A series of parallel straight lines cut any two transversals proportionally.

3. The straight line which joins the middle points of two sides of a triangle is parallel to the third side.

4. In  $\triangle ABC$ , E is the mid point of the median AD and BE produced cuts AC in F, prove that  $AF = \frac{1}{3} AC$

5. P and Q are any two points on two parallel st. lines. PQ is divided at X in a given ratio. Find the locus of the point X.

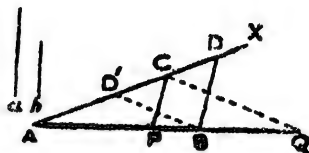
6. Two triangles ABC, DBC stand on the same side of the common base BC, and from any point E in BC lines are drawn parallel to BA, BD meeting AC, DC in F and G. Show that FG is parallel to AD. [G. U. '51]

### সম্পাদ 1

• To divide a given straight line internally and externally in the ratio of two given straight lines.

মনে কর, AB সরলরেখাকে প্রদত্ত  $a$  ও  $b$  দৈর্ঘ্যের অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত করিতে হইবে।

অঙ্কন : A বিন্দু দিয়া যে কোন একটি সরলরেখা AX টান। AX হইতে  $AC=a$  একক,  $CD=b$  একক এবং



১৭নং চিত্র

CA হইতে  $CD'=b$  একক কাটিয়া লও। DB যোগ করিয়া DBর সমান্তরাল CP টান, উহা যেন ABকে P বিন্দুতে ছেদ করিল। এক্ষণে P বিন্দুতে AB রেখা  $a:b$  অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হইল। আবার, D'B যোগ করিয়া CQ  $\parallel$  D'B টান, উহা যেন ABর বর্ধিতাংশকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল। AB রেখা Q বিন্দুতে  $a:b$  অনুপাতে বহির্বিভক্ত হইল।

প্রমাণ :  $\because \triangle ABD$ তে  $CP \parallel DB$ ,

$$\therefore AP : PB = AC : CD = a : b.$$

আবার,  $\because ABD$ এ  $CQ \parallel D'B$ ,

$$\therefore AQ : QB = AC : CD' = a : b.$$

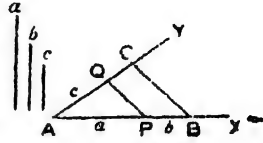
[ উদ্য : এইরূপে যে-কোন সরলরেখাকে যে-কোন অনুপাতে বিভক্ত করা যায়। 3 : 2 অনুপাতে বিভক্ত করিতে হইলে,  $AC=3$  দৈর্ঘ্য একক এবং  $CD=2$  দৈর্ঘ্য একক লইতে হইবে। ]

### সম্পাত্ত ২

To construct the fourth proportional to three given straight lines.

মনে কর,  $a, b$  ও  $c$  তিনটি ঞ্চদ সরলরেখা। ইহাদের দৈর্ঘ্যের চতুর্থ সমানুপাতী একটি সরলরেখা ঞ্চন করিতে হইবে।

অঙ্কন : AX যে-কোন একটি সরলরেখা  
লও। উহা হইতে  $AP = a$  দৈর্ঘ্য একক এবং  
 $PB = b$  একক কাটিয়া লও। AX এর সহিত  
কোন কোণ করিয়া একটি সরলরেখা AY টান  
এবং উহা হইতে  $AQ = c$  একক কাটিয়া লও।



১৮নং চিত্র

PQ ষোগ করিয়া B বিন্দু হইতে PQ এর সমান্তরাল করিয়া BC টান, উহা যেন  
AY কে C বিন্দুতে ছেদ করিল। ঞ্চক্ষেণে QC নির্ণেয় চতুর্থ সমানুপাতী হইল।

প্রমাণ :  $\because PQ \parallel BC, \therefore AP : PB = AQ : QC,$

অর্থাৎ  $a : b = c : QC.$

$\therefore QC$  দৈর্ঘ্য  $a, b$  ও  $c$  এর চতুর্থ সমানুপাতী।

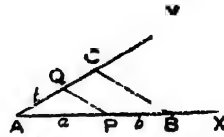
### সম্পাত্ত ৩

To find a third proportional to two given straight lines.

মনে কর,  $a$  ও  $b$  দুইটি সরলরেখা।

ইহাদের তৃতীয় সমানুপাতী নির্ণয়  
করিতে হইবে।

অঙ্কন : যে-কোন সরলরেখা AX  
লও। উহা হইতে  $AP = a$  দৈর্ঘ্য একক



১৯নং চিত্র

এবং  $PB = b$  দৈর্ঘ্য একক কাটিয়া লও। AX এর সহিত কোন কোণ করিয়া A  
বিন্দু হইতে একটি সরলরেখা AY টান এবং উহা হইতে  $AQ = b$  একক কাটিয়া  
লও। PQ ষোগ কর।  $BC \parallel PQ$  টান, উহা যেন AY-কে C বিন্দুতে ছেদ  
করিল। ঞ্চক্ষেণে QC নির্ণেয় তৃতীয় সমানুপাতী হইল।



প্রমাণ :  $PQ \parallel BC$ ,  $AP : PB = AQ : QC$ ,

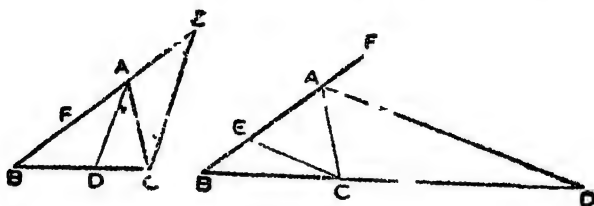
অর্থাৎ  $a : b = b : QC$   $\therefore QC$  দৈর্ঘ্য,  $a$  ও  $b$  এর তৃতীয় সমানুপাতী।

অতঃপর উপপাত্ত ৫

The internal or external bisector of an angle of a triangle divides the opposite side internally or externally in the ratio of the other two sides. [C. U. '39, '41, '44, '46, '49

D B. '48, '51, G U. '48, '50, '52, W. B. S. B. '52]

[ত্রিভুজের কোন কোণের অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক বা বহিঃসমদ্বিখণ্ডক ঐ কোণের বিপরীত বাহুকে এবং দুই বাহুর অন্তঃশেষে অন্তর্বিভক্ত বা বাহ্যবিভক্ত করে।]



২০নং চিত্র

ABC একটি ত্রিভুজ। ইহার BAC কোণের অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক AD রেখা BCকে D বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত করিয়াছে, এবং ঐ কোণের বহিঃসমদ্বিখণ্ডক AD রেখা BCর বর্ধিতাংশকে D বিন্দুতে বহিঃবিভক্ত করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,  $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$

অঙ্কন : C বিন্দু হইতে DAর সমান্তরাল করিয়া CE রেখা টান। উহা যেন BA বা BAর বর্ধিতাংশকে E বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ :  $\because DA \parallel CE, \therefore \angle DAC =$  একান্তর  $\angle ACE$

এবং  $\angle BAD$  বা  $\angle FAD =$  অসম্পূর্ণ  $\angle AEC$ ;

কিন্তু  $\angle FAD = \angle CAD, \therefore \angle ACE = \angle AEC, \therefore AC = AE$ .

একগুণে,  $\because DA \parallel CE,$

$\therefore BD : DC = BA : AE = BA : AC$  [ $\because AE = AC$ ]

### উপপাত্ত 6

If a straight line drawn from an angle of a triangle divides the opposite side internally or externally in the ratio of the other two sides, then the straight line is the internal or external bisector of the angle. [C. U. '42, D. B. '33]

[ যদি ত্রিভুজের কোন শীর্ষ হইতে অঙ্কিত সরলরেখা বিপরীত বাহুকে অপার দুই বাহুর অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত বা বহির্বিভক্ত করে, তবে ঐ সরলরেখাটি ঐ শীর্ষ কোণের অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক বা বহিঃসমদ্বিখণ্ডক হইবে। ]

[ পূর্ব উপপাত্তের চিত্র আঁক । মনে কর ABC ত্রিভুজের A বিন্দু হইতে অঙ্কিত AD সরলরেখা BC বা বর্ধিত BC বাহুকে একেপে ছেদ করিয়াছে যে  $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$  প্রমাণ করিতে হইবে যে, AD রেখা BAC কোণের অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক বা বহিঃসমদ্বিখণ্ডক

অঙ্কন : DAর সমান্তরাল CE টান, উহা যেন BA বা বর্ধিত BAকে E বিন্দুতে ছেদ করিল

প্রমাণ :  $\therefore DA \parallel CE, \therefore \frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE}$

কিন্তু  $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$  (স্বীকার)

$\therefore \frac{BA}{AE} = \frac{BA}{AC}, \therefore AE = AC, \therefore \angle ACE = \angle AEC.$

আবার,  $\therefore DA \parallel CE, \therefore \angle DAC =$  একান্তর  $\angle ACE$ , এবং  $\angle BAD$  বা  $\angle FAD =$  অন্তঃকোণ  $\angle AEC$ , কিন্তু  $\angle ACE = \angle AEC$  (প্রমাণিত),  $\therefore \angle DAC = \angle BAD$  বা  $\angle FAD, \therefore AD$  রেখা BAC কোণের সমদ্বিখণ্ডক।

[ দ্রষ্টব্য : যদি কোন সরলরেখা একপভাবে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত হয় যে তাহাদের অংশদ্বয়ের অনুপাত সমান, তবে সরলরেখাটি সমান্তরালভাবে (harmonically) বিভক্ত হইয়াছে বলা হয়। ]

## বিবিধ সমাধান (3)

উদা. 1. The bisectors of the base angles of a triangle meet the opposite sides at X and Y respectively. If XY is parallel to the base, prove that the triangle is isosceles

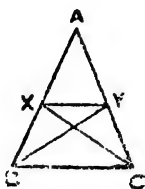
[ C. U. '39 Sup. ]

মনে কর, ABC ত্রিভুজের  $\angle B$  ও  $\angle C$  এর সমদ্বিখণ্ডক BY ও CX বিপরীত বাহুদ্বয়কে যথাক্রমে Y ও X বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং  $XY \parallel BC$ .

প্রমাণ করিতে হইবে যে,  $\triangle ABC$  সমদ্বিবাহু।

প্রমাণ :  $\because \angle ABC$  এর সমদ্বিখণ্ডক BY,  $\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{AY}{CY}$ .

অনুরূপে  $\because CX$ ,  $\angle ACB$  এর সমদ্বিখণ্ডক,  $\therefore \frac{AC}{BC} = \frac{AX}{BX}$ .



২১নং চিত্র

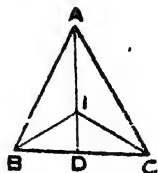
আবার,  $\because XY \parallel BC$  (স্বীকার),  $\therefore \frac{AX}{BX} = \frac{AY}{CY}$ .

অতএব,  $\frac{AB}{BC} = \frac{AC}{BC}$ ,  $\therefore AB = AC$ .  $\therefore \triangle ABC$  সমদ্বিবাহু।

উদা. 2. Prove that the internal bisectors of the angles of a triangle meet at a point.

[ C. U. '14 ; W. B. S. F. '52 ; D. B. '30, '44 ]

মনে কর,  $\triangle ABC$  এর  $\angle B$  ও  $\angle C$  কোণের সমদ্বিখণ্ডক BI ও CI পরস্পর I-বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। AI যোগ কর। প্রমাণ করিতে হইবে AI রেখা BAC কোণের সমদ্বিখণ্ডক।



AI-কে বর্ধিত করিয়া BCকে D বিন্দুতে ছেদ কর।

২২নং চিত্র

প্রমাণ :  $\triangle ABD$ তে  $\because \angle B$  এর সমদ্বিখণ্ডক BI,  $\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{AI}{DI}$ .

$\triangle ADC$ তে  $\therefore \angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডক  $CI$ ,  $\therefore \frac{AC}{CD} = \frac{AI}{DI}$

$\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}$ ,  $\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}$ ,  $\therefore AI$ ,  $\angle BAC$ র সমদ্বিখণ্ডক।

উদা. ৩.<sup>৭</sup>  $AD$  is a median of the  $\triangle ABC$ ; and the angles  $ADB$  and  $ADC$  are bisected by lines which meet  $AB$ ,  $AC$  at  $E$  and  $F$  respectively. Show that  $EF$  is parallel to  $BC$ .

[C. U. '37, '39, '42; D. B. '42, '51; G. U. '48]

[যাহা যাহা স্বীকার করা আছে তাহা আগে  
লিখিয়া লও।]  $EF$  যোগ কর।

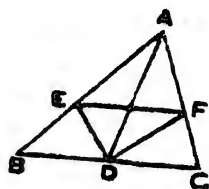
প্রমাণ:  $\therefore DE$ ,  $\angle ADB$ র সমদ্বিখণ্ডক,

$$\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{AD}{BD}$$

আবার,  $\therefore DF$ ,  $\angle ADC$ র সমদ্বিখণ্ডক,

$$\therefore \frac{AF}{CF} = \frac{AD}{DC} = \frac{AD}{BD} \quad (\because BD = DC),$$

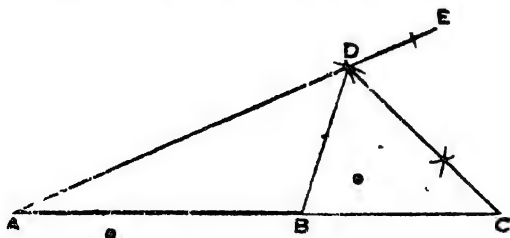
$$\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{AF}{CF}, \therefore EF \parallel BC.$$



২৩নং চিত্র

উদা. 4. Draw a straight line  $AB$  of length 4cm. and divide it externally at  $C$  in the ratio 5 : 2. [E. B. S. B. '49]

4 সেন্টিমিটারের সমান  $AB$  সবলরেখা লও।  $A$ -কে কেন্দ্র করিয়া 5 সে. মি. ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ আঁক এবং  $B$ -কে কেন্দ্র করিয়া 2 সে.মি.



২৪নং চিত্র

ব্যাসার্ধ লইয়া আর একটি বৃত্তচাপ আঁক। চাপ দুইটি যেন  $D$  বিন্দুতে ছেদ করিল।  $AD$  ও  $BD$  যোগ কর।  $\angle ADB$ র বহিঃসমদ্বিখণ্ডক (অর্ধাং

$\angle BDE$  এর সম্বন্ধিত্বগুণক  $DC$  আক। উহা যেন  $AB$  এর বর্ধিতাংশকে  $C$  বিন্দুতে ছেদ করিল। এক্ষণে  $AB$  রেখা  $C$  বিন্দুতে উদ্ভিষ্টকপে বিভক্ত হইল।

প্রমাণঃ  $\because \angle ADB$  এর বর্ধিত্বগুণক  $DC$ ,

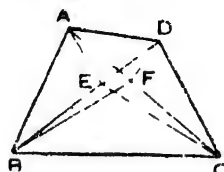
$$\therefore AC : BC = AD : DB = 5 : 2.$$

[ দ্রষ্টব্য : নমুনা ১ এর সাহায্যে হকার সমাধান করা সহজ ]

উদা. ৫.<sup>০</sup>  $ABCD$  is a quadrilateral. Show that if the bisectors of the angles  $A$  and  $C$  meet on the diagonal  $BD$ , the bisectors of the angles  $B$  and  $D$  will meet on  $AC$ .

[ C. U. '12, '38 ; G. U. '50 ]

মনে কর,  $ABCD$  চতুর্ভুজের  $\angle A$  ও  $\angle C$  এর সম্বন্ধিত্বগুণক  $BD$  কর্ণের উপর  $E$  বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে এবং  $\angle B$  এর সম্বন্ধিত্বগুণক  $BF$  যেন  $AC$  কর্ণকে  $F$  বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।  $DF$  যোগ কর। প্রমাণ করিতে হইবে যে  $DF$ ,  $\angle ADC$  এর সম্বন্ধিত্বগুণক।



২৫নং চিত্র

প্রমাণঃ  $\triangle ABD$  এর  $\angle BAD$  এর সম্বন্ধিত্বগুণক  $AE$ ,

$\therefore AB : AD = BE : DE$ .  $\triangle BCD$  তে  $CE$ ,  $\angle BCD$  এর সম্বন্ধিত্বগুণক,

$$\therefore BC : DC = BE : DE. \quad \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DC}, \quad \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$$

আবার,  $BF$  রেখা  $\angle ABC$  এর সম্বন্ধিত্বগুণক,  $\frac{AB}{BC} = \frac{AF}{CF}$ ,

সুতরাং  $\frac{AD}{DC} = \frac{AF}{CF}$ ,  $DF$  রেখা  $\angle ADC$  এর সম্বন্ধিত্বগুণক।

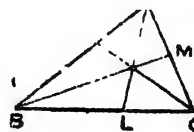
উদা. ৬.<sup>০</sup> The bisectors of the angles of the  $\triangle ABC$  intersect the sides  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  at  $L$ ,  $M$ ,  $N$  respectively. Prove that  $BL \cdot CM \cdot AN = LC \cdot MA \cdot NB$ . [C. U. '46]

[ বাহা স্বীকার করা আছে তাহা আগে লিখ ]

$$\therefore \angle A \text{ এর সম্বন্ধিত্বগুণক } AL, \therefore \frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC} \quad (1)$$

$$\therefore BM, \angle B \text{ এর সম্বন্ধিত্বগুণক, } \frac{CM}{AM} = \frac{BC}{AB} \quad (2)$$

$$\text{অতরূপে } \frac{AN}{BN} = \frac{AC}{BC} \quad (3).$$



২৬নং চিত্র

একগুণে (1), (2) ও (3) গুণ করিয়া পাই

$$\frac{BL}{CL} \cdot \frac{CM}{AM} \cdot \frac{AN}{BN} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{AB} \cdot \frac{AC}{BC} = 1,$$

$$\therefore BL \cdot CM \cdot AN = LC \cdot MA \cdot NB.$$

**উদা. 7.** A point moves so that the ratio of its distances from two fixed points is constant, prove that the locus of the moving point is a circle.

[ C. U. '21, '44, '49 ; D. B '31, '33, '46 ]

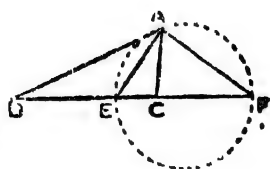
[অথবা, Given the base of a triangle and the ratio of the other two sides ; find the locus of the vertex. ]

মনে কর, B ও C দুইটি নির্দিষ্ট স্থিরবিন্দু এবং A এরূপ একটি গতিশীল বিন্দু যে, ইতার সব অবস্থানে  $AB : AC =$  ধ্রুবক (নির্দিষ্ট অনুপাত)। প্রমাণ করিতে হইবে যে, A বিন্দুর সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত।

**অঙ্কন :**  $\angle BAC$ র অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক AE ও বহিঃসমদ্বিখণ্ডক AF টান, উহারা যেন BCকে E ও F বিন্দুতে সখ্যক্রমে অন্তর্বিভক্ত ও বাহ্যবিভক্ত করিল।

**প্রমাণ :**  $\because$  AE ও AF,  $\angle BAC$ র সমদ্বিখণ্ডক,

$$\therefore \frac{BE}{CE} = \frac{BF}{CF} = \frac{AB}{AC} = \text{নির্দিষ্ট অনুপাত।}$$



২৭নং চিত্র

সুতরাং BC রেখা E ও F বিন্দুতে একটি নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভক্ত হইয়াছে। এখন, B ও C স্থিরবিন্দু বলিয়া E ও F দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইবে। আবার, AE ও AF একই কোণের অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক ও বহিঃসমদ্বিখণ্ডক বলিয়া  $\angle EAF = 1$  সমকোণ।  $\therefore$  A বিন্দুতে EF-এর সম্মুখকোণ সর্বদা এক সমকোণ হইবে। অতএব, EF-কে বাস করিয়া অঙ্কিত বৃত্তই A বিন্দুর সঞ্চারপথ।

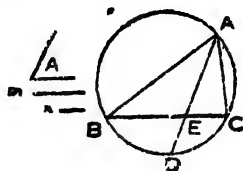
[ **দ্রষ্টব্য :** এই বৃত্তকে Circle of Apollonius বলে। ]

**উদা. ৪.** Construct a triangle having given the base, the vertical angle and the ratio of the other two sides.

মনে কর, ত্রিভুজটির ভূমি  $BC$ , শীর্ষকোণ

A এবং  $AB : AC = m : n$  দেওয়া আছে।

ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।



অঙ্কন : BC ভূমিকে  $m : n$  অনুপাতে

E বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত কর। BGর উপর

LA ধারণকৃত BAC বৃত্তাংশ আঁক এবং

বৃত্তটিকে সম্পূর্ণ কর। BAC চাপের অনুবন্ধী চাপকে D বিন্দুতে সম্বন্ধিত

কর। DE যোগ করিয়া বর্ধিত কর, উহা যেন পরিধিকে A বিন্দুতে ছেদ

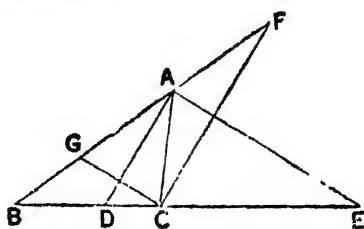
করিল।  $AB$  ও  $AC$  যোগ কর।  $ABC$  নির্ণেয় ত্রিভুজ হইল।

**প্রমাণ :**  $\because$  চাপ  $BD =$  চাপ  $CD$ ,  $\therefore \angle BAD = \angle CAD$ .

$\therefore AE, \angle BAC$ র সমদ্বিখণ্ডক।  $\therefore AB : AC = BE : CE = m : n$ ,  
এবং অঙ্কন অনুসারে  $\angle BAC =$  প্রদত্ত  $\angle A$ .

**उदा. 9.** If a straight line BC is divided harmonically at D and E and if DE subtends a right angle at any point A outside BC, then AD and AE are the internal and external bisectors of the angle between AB and AC.

মনে কর, BC সরলরেখা D ও E বিন্দুতে একই অস্থাপাতে (ধর  $m : n$  অস্থাপাতে) যথাক্রমে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত হইয়াছে এবং A বিন্দুতে DEর সম্মুখ কোণ DAE এক সমকোণ।



প্রমাণ করিতে হইবে যে, AD  
ও AE যথাক্রমে BAC কোণের  
অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক ও বহিঃসমদ্বিখণ্ডক।

অঙ্কন : C বিন্দু হইতে  $CG \parallel EA$  ও  $CF \parallel DA$  টান, উহার। যেন  
BA ও বর্ধিত BAকে যথাক্রমে G ও H বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ :  $\triangle BCF$  এ,  $\because AD \parallel CF$ ,  $\therefore BA : AF = BD : DC$ .

আবার,  $\triangle BGC$  তে  $\because AE \parallel GC$ ,  $\therefore BE : CE = BA : GA$ .

কিন্তু  $BD : DC = BE : CE$  (স্বীকার),  $\therefore \frac{BA}{AF} = \frac{BA}{AG}$ ,  $\therefore AF = AG$ .

এক্ষণে,  $\because$  ক্ষেত্র  $AC$  একটি সামান্তরিক এবং  $\angle DAE$  সমকোণ.

$\therefore \angle GCF$  এক সমকোণ। আন্তঃস্থ  $GF$ -এর মধ্যবিন্দু  $A$  বলিয়া  $GA = AF = AC$ .  $\therefore \angle AGC = \angle ACG = \angle CAE$  (একান্তর)।

আবার,  $\because CG \parallel EA$ ,  $\therefore \angle FAE =$  অনুরূপ  $\angle AGC$ .

$\therefore \angle FAE = \angle CAE$ .  $\therefore AE$ ,  $\angle CAF$ -এর সমদ্বিখণ্ডক, অর্থাৎ  $AE$ ,  $\angle BAC$ র বহিঃসমদ্বিখণ্ডক।

আবার,  $\angle GAD = \angle AFC = \angle ACF$  ( $\because AC = AF$ ) = একান্তর  $\angle CAD$  :

$\therefore AD$ ,  $\angle BAC$ র অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক।

অতএব,  $AD$  ও  $AE$  যথাক্রমে  $\angle BAC$ র অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক ও বহিঃসমদ্বিখণ্ডক হইল।

### Exercise 3

1. Apply theorem 5 to trisect a given straight line.
2. The external bisectors of two angles and the internal bisector of the third angle of a triangle are concurrent.
3. Prove that the base of a triangle is divided harmonically by the internal and external bisectors of the vertical angle.

[ যদি কোন সরলরেখা একই অনুপাতে অন্তঃস্থ ও বহিঃস্থভাবে বিভক্ত হয়, তবে উহাকে সমঞ্জসভাবে (harmonically) বিভক্ত হইয়াছে বলা হয়। ]

4. The diagonals of a cyclic quadrilateral  $ABCD$  intersect at  $O$ ; if  $BC = CD$ , show that  $BA : AD = BO : DO$ .

5.  $X$  is the middle point of the side  $BC$  of the  $\triangle ABC$  and the angles  $AXB$ ,  $AXC$  are bisected externally by the



lines  $XE$ ,  $XF$  which meet  $AB$  and  $AC$  produced at  $E$  and  $F$  respectively. Prove that  $EF \parallel BC$ . [ C. U. '39 ]

6. If  $I$  is the in-centre of the  $\triangle ABC$  and  $AI$  produced meets  $BC$  in  $D$ , then  $AI : ID = AB + AC : BC$ .

৭. The two bisectors of the  $\angle A$  of the  $\triangle ABC$  cut  $BC$  in  $P$  and  $Q$ . If  $X$  is the mid pt of  $BC$ , then  $XC^2 = PX \cdot QX$ .

8. In an isosceles  $\triangle ABC$  of which each of the base angles  $B$  and  $C$  is double of the  $\angle A$ , the bisector of the angle  $C$  meets  $AB$  at  $D$ . Prove that  $AB$ ,  $BC$  and  $BD$  are three proportionals.

9. If a st. line  $AB$  be divided internally at  $C$  and externally at  $D$  in the same ratio  $m : n$ , and if  $O$  be any point on the circle on  $CD$  as diameter, then  $QA : QB = m : n$ .

### সদৃশ ত্রিভুজ ( Similar Triangles )

62. সদৃশকোণী ত্রিভুজ ( Equiangular triangles ) : কোন একটি ত্রিভুজের কোণগুলি যথাক্রমে অন্য একটি ত্রিভুজের কোণগুলির সমান হইলে, ত্রিভুজ দুটিকে সদৃশকোণী ত্রিভুজ বলে। সুতরাং বুঝা গেছে যে দুইটি করিয়া কোণ সমান জানা থাকিলেই ত্রিভুজদ্বয়কে সদৃশকোণী বলা যাইবে। কারণ, তখন তাহাদের তৃতীয় কোণগুলি অবশ্যই সমান হইবে।

63. সদৃশ ত্রিভুজ ( Similar triangles ) : যদি দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হয় এবং তাহাদের অনুরূপ বাহুগুলির অনুপাত সমান হয়, তবে তাহাদিগকে সদৃশ ত্রিভুজ বলে। যে-কোণ যে-কোণের কাছিত সমান, তাহাদের বিপরীত বাহুগুলিকে অনুরূপ বাহু ধরিতে হয়।

উদ্য : দুইটি ত্রিভুজের ঠিক অনুরূপ কারণে পরস্পর সদৃশকোণী ও সদৃশ হইয়া থাকে।

১৪ //

### উপপাত্ত ৭

If two triangles are equiangular, their corresponding sides are proportional. [C. U. '38, '41, '43, '47, '48, '51;

G. U. '48, '50, '52 D. B. '40, '41, '43, '45, '50, '51]

[ দুইটি দ্বিভুজ সদৃশ্য হলে তাহাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতীক হইবে। ]

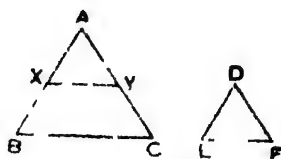
ABC ও DEF ত্রিভুজ দুটি

$\angle A = \angle D$   $\angle B = \angle E$  এবং

$\angle C = \angle F$

প্রমাণ কাৰ্যতে হইবে যে,

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$



১২নং চিত্র

অঙ্কন : AB ও AC হইতে DE ও DF-এ সমান করিয়া যথাক্রমে AX ও AY অংশ কাটিয়া লও। XY যোগ কর।

প্রমাণ :  $\triangle AXY$  ও  $\triangle DEF$  এর  $AX = DE$ ,  $AY = DF$  এবং অন্তর্ভুক্ত  $\angle A =$  অন্তর্ভুক্ত  $\angle D$ , ত্রিভুজ দুটি সমবশ।

$$\angle AXY = \angle DEF = \angle ABC \text{ (স্বীকার)},$$

$$XY \parallel BC, \quad \frac{AB}{AX} = \frac{AC}{AY}, \text{ অর্থাৎ } \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}.$$

অনুরূপে, BA ও BC হইতে যথাক্রমে ED ও EF এর সমান অংশ কাটিয়া লইয়া প্রমাণ করা যায় যে,  $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$   $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$ । ১৪. //

### উপপাত্ত ৪

( উপপাত্ত ৭-এর বিপরীত প্রতিজ্ঞা )

If two triangles have their sides proportional, when taken in order, they are equiangular.

[ C. U. '42, '45 ; D. B. '32, '45 ]

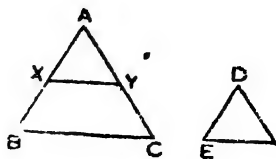
[ দুইটি ত্রিভুজের বাহুগুলি যথাক্রমে সমানুপাতী হইলে ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণী হইবে। ]

স্বীকার :  $ABC$  ও  $DEF$  ত্রিভুজদ্বয়ের

$$AB = BC = AC$$

$$DE = EF = DF$$

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ত্রিভুজদ্বয়  
সদৃশকোণী অর্থাৎ  $\angle A = \angle D$ ,  $\angle B = \angle E$   
এবং  $\angle C = \angle F$ .



৩১নং চিত্র

অঙ্কন :  $AB$  হইতে  $DE$ র সমান  $AX$  এবং  $AC$  হইতে  $DF$ -এর সমান  
 $AY$  কাটিয়া লও।  $XY$  যোগ কর।

প্রমাণ :  $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$  (স্বীকার),  $\therefore \frac{AB}{AX} = \frac{AC}{AY}$ ,  $\therefore XY \parallel BC$ .

$$\therefore \angle B = \angle AXY \text{ এবং } \angle C = \angle AYX.$$

$$\therefore ABC \text{ ও } AXY \text{ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী,}$$

$$\therefore \frac{AB}{AX} = \frac{BC}{XY}, \text{ কিন্তু } \frac{AB}{AX} = \frac{AB}{DE} (\because AX = DE) = \frac{BC}{EF} \text{ (স্বীকার।)}$$

$$\therefore \frac{BC}{XY} = \frac{BC}{EF} \therefore XY = EF.$$

এক্ষণে  $AXY$  ও  $DEF$  ত্রিভুজদ্বয়ের  $\because AX = DE, AY = DF$  এবং  $XY = EF$ ,

$$\therefore \text{ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।} \therefore \angle AXY = \angle E \text{ ও } \angle AYX = \angle F.$$

$$\therefore \angle B = \angle AXY = \angle E \text{ ও } \angle C = \angle AYX = \angle F.$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ ও } \triangle DEF \text{ সদৃশকোণী।}$$

### বিবিধ সমাধান (4)

উদা. 1. , The line joining the middle points of any two sides of a triangle is parallel to the third side and is half of it.

[ চিত্র আঁকিয়া লও ] মনে কর,  $\triangle ABC$ র  $AB$ -বাহুর মধ্যবিন্দু  $D$  এবং  $AC$ র মধ্যবিন্দু  $E$ .  $DE$  যোগ কর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,  $DE \parallel BC$  এবং  $DE = \frac{1}{2}BC$ .

প্রমাণ :  $\therefore D$  ও  $E$  যথাক্রমে  $AB$  ও  $AC$ র মধ্যবিন্দু,

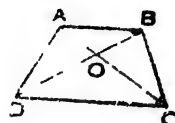
$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ ,  $\therefore DE \parallel BC$  (প্রমাণিত হইল)। আবার,  $\therefore DE \parallel BC$ ,

$\therefore \angle ADE = \angle B$  এবং  $\angle AED = \angle C$ , সুতরাং  $\triangle ADE$  ও  $\triangle ABC$  সদৃশকোণী।  $\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2}$  ( $\because AD = \frac{1}{2}AB$ )  $\therefore DE = \frac{1}{2}BC$ .

উদা. 2. In the trapezium  $ABCD$ ,  $AB$  is parallel to  $DC$  and the diagonals intersect at  $O$ , show that  $OA : OC = OB : OD = AB : DC$ . [C. U. '46]

$ABCD$  ট্রাপিজিয়ামের  $AB \parallel DC$  এবং  $AC$  ও  $BD$  কর্ণদ্বয়  $O$  বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,  $AO : OC = OB : OD = AB : DC$ .



প্রমাণ :  $AB \parallel DC$ ,

ও২নং চিত্র

$\therefore \angle BAO =$  একান্তর  $\angle OCD$  এবং

$\angle ABO =$  একান্তর  $\angle ODC$ ,  $\therefore \triangle AOB$  ও  $\triangle DOC$  সদৃশকোণী।

$\therefore AO : OC = OB : OD = AB : DC$ .

উদা. 3 If through any point  $X$  within a circle two chords  $AB$ ,  $CD$  are drawn and  $AC$ ,  $BD$  are joined, show that  $AX : DX = CX : BX$ . [D. B. '40]

(নিম্নে চিত্র আঁকিয়া যাহা দেওয়া আছে তাহা আগে লিখ)

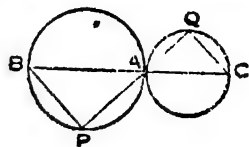
প্রমাণ : একই  $BC$  চাপের উপর পরিধিস্থ  $\angle A = \angle D$ , এবং  $\angle AXC =$  বিপ্রতীপ  $\angle DXB$ , সুতরাং  $\triangle ACX$  ও  $\triangle DBX$  সদৃশকোণী।

$\therefore AX : DX = CX : BX$ .

উদা. 4. Two circles touch one another at  $A$  externally and a straight line through  $A$  cuts them at  $P$  and  $Q$ . Prove that their diameters are as  $AP : AQ$ .

মনে কর, বৃত্ত দুইটি  $A$  বিন্দুতে পরস্পর বহিঃস্পর্শ করিয়াছে।  $A$  বিন্দু দিয়া  $PQ$  সরলরেখা টানা হইয়াছে, উহা যেন বৃত্ত দুইটির পরিধিকে  $P$  ও  $Q$  বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।  $AB$  ও  $AC$  ব্যাস টান। প্রমাণ করিতে হইবে যে,  $AB : AC = AP : AQ$ .  $BP$  ও  $CQ$  যোগ কর।

**প্রমাণ :**  $\because$  বৃত্তদ্বয় A বিন্দুতে পরস্পর স্পর্শ করিয়াছে,  $\therefore$  উহাদের কেন্দ্রদ্বয় ও A বিন্দু এক সরলরেখায় অবস্থিত, অর্থাৎ AB ও AC এক সরলরেখায় অবস্থিত।  
এখন,  $\angle P$  ও  $\angle Q$  অর্ধবৃত্তস্থ বলিয়া প্রত্যেকে সমকোণ, এবং  $\angle BAP =$  বিপ্রতীপ  $\angle QAC$ .



$\therefore \triangle ABP$  ও  $\triangle AQC$  সদৃশকোণী।

৩৩নং চিত্র

$$\therefore AB : AC = AP : AQ.$$

**উদা. 5.** Prove that the perimeters of any two similar triangles are in the ratio of any two corresponding sides

[ C. U. '46 ]

[ চিত্র আঁকিয়া লও ] মনে কর, ABC ও DEF দুইটি সদৃশ ত্রিভুজের AB, AC ও BC বাহুগুলি যথাক্রমে DE, DF ও EF বাহুর সমান্তরাল।

$$\text{প্রমাণ করিতে হইবে যে } \frac{\triangle ABC \text{ এর পরিমাপ}}{\triangle DEF \text{ এর পরিমাপ}} = \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}.$$

$$\text{প্রমাণ : } \because \text{ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ, } \therefore \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}.$$

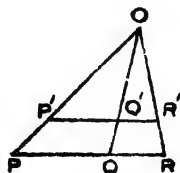
$\therefore$  সংযোজনক্রিয়া দ্বারা,

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = \frac{AB+AC+BC}{DE+DF+EF} = \frac{\triangle ABC \text{ এর পরিমাপ}}{\triangle DEF \text{ এর পরিমাপ}}.$$

**উদা. 6.** Two parallel straight lines meet the straight lines OP, OQ, OR at P, Q, R and P', Q', R' respectively; prove that  $PQ : QR = P'Q' : Q'R'$ . [C.U. '41; E. B. S. B. '51; G.U. '50]

(যাহা দেওয়া আছে তাহা আগে লিখ।)

**প্রমাণ :**  $\because P'Q' \parallel PQ \therefore \angle OP'Q' = \angle OPQ$   
ও  $\angle OQ'P' = \angle OQP$ ,  $\therefore \triangle OP'Q'$  ও  $\triangle OPQ$  সদৃশকোণী।  $\therefore \frac{P'Q'}{PQ} = \frac{OQ'}{OQ}.$



৩৪নং চিত্র

অতএবে,  $\frac{OQ'}{OQ} = \frac{O'R'}{QR}$  ( $\because \triangle OQ'R' \text{ ও } \triangle OQR$  সদৃশকোণী।

$\therefore \frac{P'Q'}{PQ} = \frac{O'R'}{QR}$ , একান্তর ক্রিয়া দ্বারা  $\frac{P'Q'}{Q'R'} = \frac{PQ}{QR}$

**উদা. 7.** Any straight line drawn parallel to the base of a triangle is bisected by the line drawn from the vertex to the middle point of the base. [ C. U. '14 ]

[ ৩৪ নং চিত্র দেখ ] মনে কর,  $\triangle OPR$  এর মধ্যমা  $OQ$  এবং  $P'R'$  সরলরেখা  $PR$  এর সমান্তরাল।  $P'R'$  যেন  $OQ$  কে  $Q'$  বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে,  $P'Q' = Q'R'$ ।

**প্রমাণ :** [ উদা. ৬এর মত প্রথমে প্রমাণ কর যে,  $\frac{P'Q'}{Q'R'} = \frac{PQ}{QR}$ ।

একণে,  $\because PQ = QR$  ( স্বীকার ),  $\therefore P'Q' = Q'R'$ ।

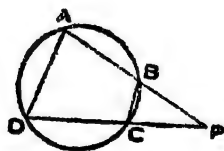
**উদা. 8.** ABCD is a cyclic quadrilateral, AB, DC are produced intersecting at P outside the circle. Prove that  $PB : PD = PC : PA$ . [ C. U. '11, '48 ; E. B. S. B. '48 ]

[ যাহা দেওয়া আছে তাহা আগে লিখিবে। ]

**প্রমাণ :** ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের AB বাহুকে বর্ধিত করা হইয়াছে,  $\therefore$  বহিঃস্থ  $\angle PBC =$  অন্তঃস্থ বিপরীত  $\angle D$ .

এখন  $\triangle BPC$  ও  $\triangle APD$  এর  $\angle P$  সাধারণ এবং  $\angle PBC = \angle D$ , হুত্রাং অবশিষ্ট কোণদ্বয় সমান।

$\therefore$  ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী,  $\therefore \frac{BP}{PD} = \frac{PC}{AP}$



৩৫নং চিত্র

[ **জটিল্য :** সদৃশকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের অনুরূপ বাহুগুলির অনুপাত সমান হয়। আর, যে যে কোণ সমান তাহাদের বিপরীত বাহুই অনুরূপ বাহু হয়। এখানে  $\angle PBC = \angle D$  বলিয়া PC ও AP অনুরূপ বাহু হইল এবং  $\angle BCP = \angle A$  বলিয়া PB ও PD অনুরূপ বাহু। যে ত্রিভুজের আগে উল্লেখ করিবে অনুরূপ লিখিবার সময় তাহারই বাহুকে আগে লিখিতে হইবে। ]

উদা. 9. ABCD is a parallelogram. From D a straight line is drawn to cut AB at E and CB produced at F. Show that  $DA : AE = BF : BE = FC : CD$ . [C. U. '38]

[বাহা দেওয়া আছে তাহা আগে লিখিয়া লও।]

প্রমাণ :  $\angle AED =$  বিপ্রতীপ  $\angle BEF$  এবং  $\angle A =$  একান্তর  $\angle EBF$ ,  $\therefore$  তৃতীয় কোণদ্বয় সমান।

$\therefore \triangle ADE$  ও  $\triangle BEF$  সদৃশকোণী।

$$\therefore \frac{AD}{BF} = \frac{AE}{BE}, \therefore \text{একান্তর ক্রিয়া দ্বারা} \frac{AD}{AE} = \frac{BF}{BE}.$$

আবার,  $\triangle BEF$  ও  $\triangle FDC$  সদৃশকোণী ( $\because \angle FEB =$  অঙ্কুরূপ  $\angle FDC$ , এবং  $\angle EBF = \angle C$ ),

$$\therefore \frac{FB}{FC} = \frac{BE}{DC}, \therefore \frac{BF}{BE} = \frac{FC}{CD}. \text{ অতএব, } \frac{AD}{AE} = \frac{BF}{BE} = \frac{FC}{CD}$$

উদা. 10. Prove that any chord of a circle is a mean proportional between its diameter and the perpendicular from either extremity of the chord upon the tangent at the other. [C. U. '20]

মনে কর, AC প্রদত্ত বৃত্তের একটি জ্যা, বৃত্তটির C বিন্দুতে PC একটি স্পর্শক এবং  $AP \perp PC$ .

A বিন্দু দিয়া AB ব্যাস টানা হইল। প্রমাণ করিতে

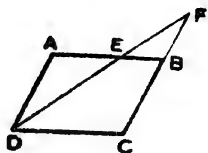
হইবে যে  $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AP}$  (বা  $AC^2 = AB \cdot AP$ ).

BC যোগ কর।

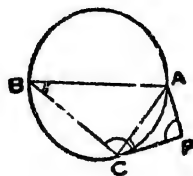
প্রমাণ :  $\angle ACB$  অর্ধবৃত্তস্থ বলিয়া সমকোণ এবং  $\angle P$  সমকোণ।

$\therefore$  PC স্পর্শক এবং AC স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা,  $\therefore \angle ACP =$  একান্তর বৃত্তাংশস্থ  $\angle B$ . অতএব,  $\triangle ABC$  ও  $\triangle APC$  সদৃশকোণী।

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AP}.$$

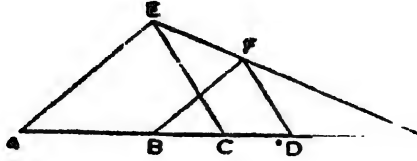


৩৬নং চিত্র



৩৭নং চিত্র

উদা. 11. A, B, C and D are four points lying in order on a straight line. Find a point X on it such that  $XA : XB = XC : XD$ . [ C. U. '42 ; E. B. S. B. '50 ]



৩৮নং চিত্র

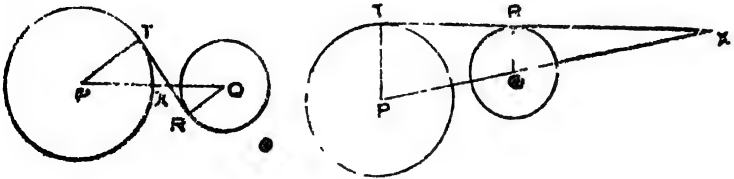
মনে কর, A, B, C ও D বিন্দুগুলি একই সরলরেখায় অবস্থিত। ঐ সরল রেখার উপর এমন একটি X বিন্দু স্থাপন করিতে হইবে যেন  $XA : XB = XC : XD$  হয়।

অঙ্কন : ACর উপর যে কোন ত্রিভুজ AEC আঁক। B বিন্দু হইতে AEর সমান্তরাল এবং D বিন্দু হইতে CEর সমান্তরাল দুইটি সরলরেখা টান। উহারা যেন F বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল। EF যোগ করিয়া বর্ধিত কর। উহা যেন ADর বর্ধিতাংশকে X বিন্দুতে ছেদ করিল। X নির্ণয় বিন্দু হইল।

প্রমাণ :  $\because BF \parallel AE, \therefore \frac{AX}{BX} = \frac{EX}{FX}$

আবার,  $\because DF \parallel CE, \therefore \frac{CX}{DX} = \frac{EX}{FX} \therefore \frac{AX}{BX} = \frac{CX}{DX}$

উদা. 12. A common tangent to two circles cuts the line joining their centres, internally or externally, in the ratio of their radii.



৩৯নং চিত্র

মনে কর, বৃত্ত দুইটির কেন্দ্র P ও Q, এবং উভয় বৃত্তের সাধারণ স্পর্শক



TR কেন্দ্র-সংযোজক রেখা PQকে ১ম চিত্রে অন্তঃস্থভাবে এবং ২য় চিত্রে বহিঃস্থভাবে X বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে,  $PX : QX = PT : QR$ . PT ও QR যোগ কর।

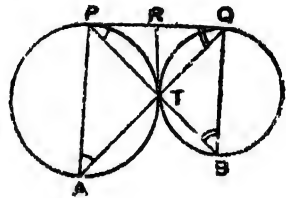
প্রমাণ : RT স্পর্শক বলিয়া  $\angle T = \angle QRX$  (সমকোণ). এবং  $\angle PXT = \angle RXQ$ ,  $\therefore \triangle PXT$  ও  $\triangle QXR$  সদৃশকোণী।

$\therefore PX : QX = PT : QR$ .

উদা. 13. If two circles touch externally, their common tangent is a mean proportional between their diameters.

মনে কর, দুইটি বৃত্ত T বিন্দুতে পরস্পর বহিঃস্পর্শ করিয়াছে এবং PQ উহাদের সাধারণ স্পর্শক। প্রমাণ করিতে হইবে যে, PQ বৃত্ত দুইটির ব্যাসদ্বয়ের মধ্য সমান্তরপাতী।

অঙ্কন : PT যোগ করিয়া বর্ধিত কর, উহা যেন পরিধিকে B বিন্দুতে ছেদ করিল। QB যোগ কর। আবার, QT যোগ করিয়া বর্ধিত কর, উহা যেন পরিধিকে A বিন্দুতে ছেদ করিল। PA যোগ কর।



১০নং চিত্র

প্রমাণ :  $\therefore$  বৃত্তদ্বয় T বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে,  $\therefore$  ঐ বিন্দুতে উভয়ের একটি সাধারণ স্পর্শক আছে। মনে কব, ঐ সাধারণ স্পর্শক TR, উহা PQকে R বিন্দুতে ছেদ করিল। এক্ষণে,  $\therefore PR = RT$ ,  $\therefore \angle RTP = \angle RPT$ . আবার,  $\therefore RT = RQ$ ,  $\therefore \angle RTQ = \angle RQT$ .

$\therefore$  সমগ্র  $\angle PTQ = \angle TPQ + \angle PQT = \frac{1}{2} \times 2$  সমকোণ = 1 সমকোণ।

$\therefore \angle PTA = 1$  সমকোণ,  $\therefore$  উহা অর্ধবৃত্তস্থ কোণ,  $\therefore$  PA বৃত্তের ব্যাস।

অনুরূপে,  $\angle QTQ = 1$  সমকোণ, সুতরাং উহা অর্ধবৃত্তস্থ কোণ,  $\therefore$  QB বৃত্তের ব্যাস।

$\therefore$  PQ স্পর্শক এবং PT স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা,

$\therefore \angle QPT =$  একান্তর বৃত্তাংশ  $\angle A$ ; অনুরূপে,  $\angle PQT =$  একান্তর বৃত্তাংশ  $\angle B$ .

এখন,  $\triangle PAQ$  ও  $\triangle PBQ$  এর  $\angle AQP = \angle BPQ$  এবং  
 $\angle PAQ = \angle PBQ$ ,  $\therefore$  ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী।  $\therefore \frac{AP}{PQ} = \frac{PQ}{BQ}$

PQ, বৃত্ত দুইটির AP ও BQ ব্যাসদ্বয়ের মধ্য সমান্তরপাতী হইল।

### উপপাত্ত ৭

If two triangles have one angle of the one equal to one angle of the other and the sides about the equal angles proportional, the triangles are similar.

[ C. U. '44, '46, 48, '50 ; D. B '37, '43, '45 ; G. U. '48 ]

[ যদি কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহুর অন্তরপাত অপর কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহুর অন্তরপাতের সমান হয়, এবং উক্ত বাহুগুলির অন্তর্ভুক্ত কোণ দুইটিও সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ হইবে। ]

ABC ও DEF ত্রিভুজের  $\angle A = \angle D$

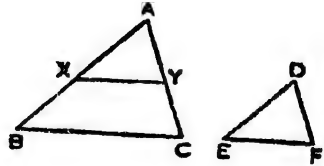
এবং  $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$  প্রমাণ করিতে হইবে

যে ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

অঙ্কন : AB হইতে DEর সমান

করিয়া AX এবং AC হইতে DF এর সমান

AY কাটিয়া লও। XY যোগ কর।



সনং চিত্র

প্রমাণ :  $\triangle AXY$  ও  $\triangle DEF$  ত্রিভুজের  $AX = DE$ ,  $AY = DF$  এবং  $\angle A = \angle D$ ,

$\therefore$  ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

$\therefore \angle AXY = \angle DEF$  এবং  $\angle AYX = \angle DFE$

আবার  $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$   $\therefore \frac{AB}{AX} = \frac{AC}{AY}$   $\therefore XY \parallel BC$ .

$\angle AXY =$  অনুরূপ  $\angle B$ . সুতরাং  $\angle E = \angle B$ .

অনুরূপে  $\angle F = \angle C$ .  $\therefore \triangle ABC$  ও  $\triangle DEF$  সদৃশকোণী।

অতএব, ঐ ত্রিভুজদ্বয় পরস্পর সদৃশ।

## বিবিধ সমাধান (৫)

উদা 1 In equiangular triangles the medians make equal angles with the corresponding sides. [ cf W 'B. S F '52 ]

মনে কর,  $ABC$  ও  $DEF$  ত্রিভুজ দুইটির  $\angle A = \angle D$ ,  $\angle B = \angle E$ ,  $\angle C = \angle F$  এবং  $AP$  ও  $DQ$  যথাক্রমে  $\triangle ABC$  ও  $\triangle DEF$  এর মধ্যমা। প্রমাণ করিতে হইবে যে,  $\angle APB = \angle DQE$ .

প্রমাণ : প্রদত্ত ত্রিভুজদ্বয় সদশকোণী,

$$\therefore AB = BC = 2BP = BP \\ \therefore DE = EF = 2EQ = EQ$$

এক্ষেণে,  $\triangle ABP$  ও  $\triangle DEQ$  এর  $\angle B = \angle E$  এবং  $AB : DE = BP : EQ$ ,  
 $\therefore$  ত্রিভুজদ্বয় সদশ।  $\therefore \angle APB = \angle DQE$  এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে অন্য মধ্যমাগুলির পক্ষেও ইহা সত্য।

উদা 2<sup>o</sup> In a triangle  $ABC$ ,  $AD$  is drawn perpendicular to the base. If  $BD : DA = DA : DC$ , prove that the triangle  $ABC$  is a right-angled triangle. [ C U '44 '48 ]

[ বাহা স্বীকার করা আছে তাহা আগে লিখিয়া লও। ]

প্রমাণ :  $\triangle ABD$  ও  $\triangle ADC$  এর

$\angle ADB = \angle ADC$  ( সমকোণ বলিয়া ) এবং

$BD : DA = DA : DC$  ( স্বীকার ),

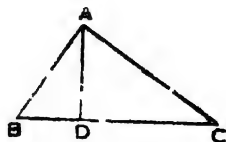
$\therefore$  ত্রিভুজদ্বয় সদশ,

$$\angle B = \angle DAC \text{ এবং } \angle C = \angle DAB$$

$\therefore$  সমগ্র  $\angle BAC = \angle DAB + \angle DAC = \angle B + \angle C$

$\therefore \angle BAC =$  দুই সমকোণের অর্ধেক = এক সমকোণ,

$\triangle ABC$  সমকোণী ত্রিভুজ।



৪২নং চিত্র

উদা 3 The altitudes of two similar triangles are proportional to their corresponding sides

[ চিত্র আঁকিয়া লও ] মনে কর,  $\triangle ABC$  ও  $\triangle DEF$  সদশ এবং

$AM \perp BC$  ও  $DN \perp EF$ . প্রমাণ করিতে হইবে যে,  $\frac{AM}{DN} = \frac{BC}{EF}$

প্রমাণ :  $\triangle ABM$  ও  $\triangle DEN$  এর  $\angle B = \angle E$  (স্বীকার),  
 $\angle AMB = \angle DNE$  ( $\because$  প্রত্যেকে সমকোণ),  $\therefore$  ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী।

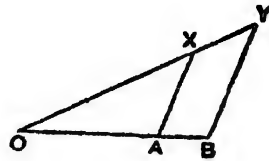
$$\frac{AM}{DN} = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$$

উদা. 4. OAB is a straight line, from A, B parallels AX and BY are drawn in the same sense so that  $OA : OB = AX : BY$ . Show that O, X and Y are collinear.

স্বীকার : OAB একটি সরল রেখা,

$AX \parallel BY$  এবং  $OA : OB = AX : BY$ .

প্রমাণ করিতে হইবে যে O, X ও Y  
 একই সরল রেখায় অবস্থিত।



OX এবং OY যোগ কর।

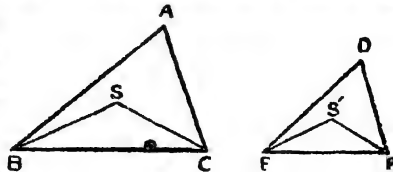
৪৩নং চিত্র

প্রমাণ :  $\because AX \parallel BY, \therefore \angle OAX =$  অনুরূপ  $\angle OBY$ .

আবার,  $OA : OB = AX : BY$  (স্বীকার),  $\therefore \triangle OAX$  ও  $\triangle OBY$   
 সদৃশ।  $\therefore \angle XOA = \angle YOY$ . এক্ষেপে,  $\because OA, OB$  একই সরলরেখা,  
 $\therefore OX$  ও  $OY$  সরলরেখাদ্বয়ও অর্থাৎ O, X, Y বিন্দুত্রয়ও একই সরল  
 রেখায় অবস্থিত।

উদা. 5. The circum-radii of two similar triangles are proportional to their corresponding sides.

জটিল্য : ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর লম্ব-সমবিক্ষেপকগুলোর ছেদবিন্দু ঐ  
 ত্রিভুজের পরিবৃত্তের কেন্দ্র হয় এবং  
 ঐ ছেদবিন্দু হইতে উহার যে-কোন  
 শীর্ষবিন্দু পর্যন্ত দূরত্ব ঐ বৃত্তের  
 ব্যাসার্ধ অর্থাৎ পরিব্যাসার্ধ।



৪৪নং চিত্র

মনে কর, ABC ও DEF সদৃশ  
 ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র  $S$  ও  $S'$ .  
 $BS$  ও  $CS$  এবং  $ES'$  ও  $FS'$  যোগ কর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,  $\frac{BS}{ES'} = \frac{BC}{EF}$

প্রমাণ : S বিন্দু  $\triangle ABC$  এর পরিবৃত্তের কেন্দ্র বলিয়া

$BS=CS$  ( $\because$  উহার ব্যাসার্ধ)। আবার,  $\because$  একই চাপের উপর  $\angle BSC$  কেন্দ্রস্থ ও  $\angle BAC$  পরিধিস্থ,  $\therefore \angle BSC=2\angle A$ .

অতরূপে,  $\triangle DEF$  এর  $ES'=FS'$  এবং  $\angle ES'F=2\angle D$ .

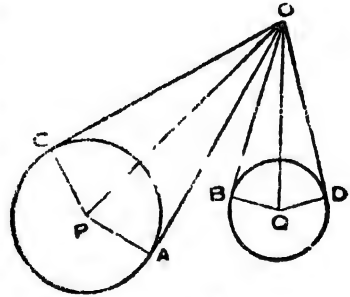
$\therefore \triangle ABC$  ও  $\triangle DEF$  সদৃশ,  $\therefore \angle A=\angle D$ ,  $\therefore \angle S=\angle S'$ .

একপে,  $\triangle BSC$  ও  $\triangle ES'F$  এর  $\angle S=S'$  এবং  $\frac{SB}{SE}=\frac{SC}{S'F}$ ,

$\therefore$  ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।  $\therefore \frac{BS}{ES'}=\frac{BC}{EF}$ .

উদা. 6. If the ratio of the tangents drawn from a given point O to two given circles be equal to the ratio of the radii of the corresponding circles, show that the two circles will subtend equal angles at O. [ C. U. '12 ]

মনে কর, O বিন্দু হইতে P ও Q কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তদ্বয়ের যথাক্রমে OA ও OB স্পর্শক টানা হইয়াছে এবং  $OA : OB = AP : BQ$ . O বিন্দু হইতে বৃত্তদ্বয়ে দ্বিতীয় স্পর্শক OC ও OD টানা হইল। প্রমাণ করিতে হইবে যে,  $\angle AOC = \angle BOD$ . OP, PC এবং OQ, QD যোগ কর।



প্রমাণ :  $\because AP$  ও  $BQ$  স্পর্শক এবং চিত্র স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ,  $\therefore \angle A$  ও  $\angle B$  প্রত্যেকে সমকোণ।  $\triangle OAP$  ও  $\triangle OBQ$  এর  $\angle A=\angle B$  এবং  $OA : OB = AP : BQ$ ,  $\therefore$  ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ।  $\therefore \angle ACP = \angle BOQ$ . অতরূপে,  $\triangle OPC$  ও  $\triangle OQD$  সদৃশ,  $\therefore \angle COP = \angle DOQ$ .  $\therefore$  সমগ্র  $\angle AOC =$  সমগ্র  $\angle BOD$ .

#### Exercise 4

1. If one of the parallel sides of a trapezium is double of the other, show that its diagonals cut each other at the point of trisection.

2. Any two medians of a triangle cut one another at a point of trisection.

3. The bases BC and EF of two similar triangles ABC, DEF are divided in the same ratio at X and Y. Prove that  $AX : DY = BC : EF$ . [ G. U. '48 ]

4. ABCD is a parallelogram ; E and F are points in a st. line parallel to AB ; AE and BF meet at P, and DE and CF meet at Q. Prove that  $PQ \parallel AD$ . [ H. S. Tech. 1960 ]

5. Find the locus of the middle point of a st. line parallel to the base of a triangle and terminated by the other two sides.

6. If two chords of a circle cut one another, the rectangle contained by the segments of the one is equal to the rectangle contained by the segments of the other. [ C. U. '51 ; G. U. '52 ]

7. Prove that in two similar triangles the corresponding medians, altitudes, circum-radii and in-radii are proportional.

8. From a point P outside a circle, a tangent PT and a secant PAB are drawn, the latter cuts the circle at A and B. Prove that  $PT^2 = PA.PB$ .

9. The bisector of the  $\angle A$  of the  $\triangle ABC$  cuts BC in D and the circum-circle at P. Show that  $AB.AC = AP.AD$ .

10. In a  $\triangle ABC$ , AD is perpendicular to BC and  $AB^2 = BC.BD$  ; show that the  $\angle A$  is a right angle.

11. In  $\triangle ABC$ , AD is perpendicular from A to BC. If BD, AD and CD be in continued proportion, then the angle BAC is a right angle. [ C. U. '44 ]

12. ABCD is a parallelogram , a st. line drawn from A cuts BD, BC, DC in P, Q, R respectively. Prove that  $AP^2 = PQ.PR$ .

13. The bisector of the vertical  $\angle A$  of the  $\triangle ABC$  meets the base at D and the circumference of the circum-circle at E. If EC is joined, show that  $AB.AC = AE.AD$ . [C. U. '37]

14. In two circles, if any two parallel radii are drawn ( one in each circle ), the st. line joining their extremities cuts the line of centres in one or other of two fixed points [C U. '17]

[ চিত্র আঁক। মনে কর, বৃত্তদ্বয়ের AP ও BQ ব্যাসার্ধ পরস্পর সমান্তরাল এবং PQ রেখা ABকে X ও Y বিন্দুতে অন্তঃস্থ ও বহিঃস্থভাবে ছেদ করিল। এক্ষণে  $AX : BX = AP : BQ$  এবং  $AY : BY = AP : BQ$ .

∴ AP ও BQ নির্দিষ্ট এবং A ও B দুইটি নির্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র বলিয়া স্থির বিন্দু, ∴ X ও Y স্থির বিন্দু। ]

জটিল্য : দুইটি বৃত্তের কেন্দ্র সংযোজক রেখা যে দুই বিন্দুতে বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধের অস্থাপাতে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত হয় তাহাদ্বয়কে ঐ বৃত্তদ্বয়ের জ্যাম্যকেন্দ্র ( Centres of Similitude ) বলে।

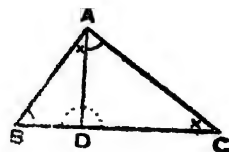
### উপপাদ্য 10

In a right-angled triangle, if a perpendicular is drawn from the right angle to the hypotenuse, the triangles on each side of it are similar to the whole triangle and to one another. [C. U. '39, '43, '45 ; W. B. S. B. '53 ; D. B. '39]

[ কোন সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণিক বিন্দু হইতে অতিভুজের উপর লম্বাৎ করিলে লম্বটির উভয় পার্শ্বে উৎপন্ন ত্রিভুজদ্বয় সমগ্র ত্রিভুজটির সহিত এবং পরস্পরের সহিত সদৃশ হইবে। ]

ABC সমকোণী ত্রিভুজের  $\angle A$  সমকোণ। A বিন্দু হইতে অতিভুজ BCর উপর AD লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,  $\triangle ABD$  ও  $\triangle ADC$  সদৃশ এবং উহারা প্রত্যেকে  $\triangle ABC$ র সহিত সদৃশ।



৩৬নং চিত্র

প্রমাণ :  $\triangle ABD$  ও  $\triangle ABC$ এর  $\angle B$  সাধারণ কোণ এবং  $\angle ADB = \angle BAC$  (∵ প্রত্যেকে সমকোণ). ∴ অবশিষ্ট  $\angle BAD =$  অবশিষ্ট  $\angle ACB$ ,  
∴ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী, সুতরাং উহাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমান্তরাল।  
∴ উহারা সদৃশ।

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে,  $\triangle ADC$  ও  $\triangle ABC$  সদৃশকোণী বলিয়া সদৃশ।

আবার,  $\therefore \triangle ABD$  ও  $\triangle ADC$  প্রত্যেকে  $\triangle ABC$ র সহিত সদৃশকোণী, হওয়ায় উহারা পরস্পর সদৃশকোণী।  $\triangle ABD$  ও  $\triangle ADC$  সদৃশ।

**অনুসিদ্ধান্ত:** (1) The perpendicular is a mean proportional between the segments of the hypotenuse.

প্রমাণ করিতে হইবে যে,  $AD$  রেখা  $BD$  ও  $DC$ র মধ্য সমান্তরপাতী।

**প্রমাণ:**  $\triangle ABD$  ও  $\triangle ADC$  এর  $\angle ADB = \angle ADC$  (সমকোণ),  $\angle ABD = \angle CAD$  এবং  $\angle BAD = \angle ACD$ ,

$\therefore \frac{BD}{AD} = \frac{AD}{CD}$ , অর্থাৎ  $AD$  রেখা  $BD$  ও  $CD$ র মধ্য সমান্তরপাতী।

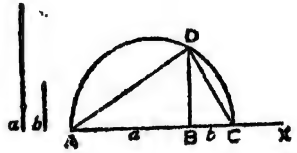
(2)  $\triangle ABD$  ও  $\triangle ABC$  সদৃশ বলিয়া  $AB^2 = BC \cdot BD$ , অর্থাৎ  $AB$  রেখা  $BC$  ও  $BD$ র মধ্য সমান্তরপাতী।

(3)  $\triangle ACD$  ও  $\triangle ABC$  সদৃশ বলিয়া  $AC^2 = BC \cdot CD$ , অর্থাৎ  $AC$  রেখা  $BC$  ও  $CD$ র মধ্য সমান্তরপাতী।

#### সম্পাদ 4

To find the mean proportional between two given straight lines. [C. U. '46]

মনে কর,  $a$  ও  $b$  দুইটি প্রদত্ত সরল রেখা। ইহাদের মধ্য সমান্তরপাতী নির্ণয় করিতে হইবে।



**অঙ্কন:** যে কোন সরল রেখা

$AX$  লও। ইহা হইতে  $AB = a$  এবং

৩৭নং চিত্র

$BC = b$  কাটিয়া লও।  $AC$ কে ব্যাস করিয়া একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কিত কর এবং  $BD \perp AC$  টান।  $BD$  যেন অর্ধবৃত্তকে  $D$  বিন্দুতে ছেদ করিল। এই  $BD$  রেখা  $AB$  ও  $BC$ র মধ্য সমান্তরপাতী।

**প্রমাণ:**  $AD$  ও  $DC$  যোগ কর।  $\angle ADC$  অর্ধবৃত্তস্থ বলিয়া সমকোণ। সমকোণিক বিন্দু  $D$  হইতে অভিলম্ব  $AC$ র উপর  $DB$  লব।

$\therefore \triangle ABD, \triangle DBC$  সদৃশ,

$\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{BD}{BC}$ ,  $\therefore \frac{a}{BD} = \frac{BD}{b}$ ,  $\therefore BD, a$  ও  $b$ এর মধ্য সমান্তরপাতী।



[ দ্রষ্টব্য : ৪৭নং চিত্র দেখ। মনে কর, AC ও AB প্রদত্ত রেখা এবং উহারা একটির উপর অপরটি একরূপে সমাপতিত যে উভয়ের A প্রান্ত মিলিত হইয়াছে। একরূপ ক্ষেত্রে AD রেখা AC ও ABর মধ্য সমান্তরপাতী হইবে। আবার, CD রেখা CB ও CAর মধ্য সমান্তরপাতী। সম্পাদ-৪ দশম শ্রেণীর পাঠ্য। ]

### বিবিধ সমাধান (৬)

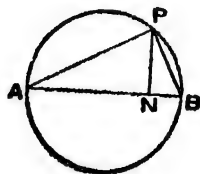
উদা। 1. The altitude AD of a  $\triangle ABC$ , right-angled at A, cuts BC in D. Prove that  $BD : AD = AD : DC$ . [C. U. '48]

[ উপপাত্ত 10এর চিত্র আঁকিয়া প্রমাণ কর যে,  $\triangle ABD$  ও  $\triangle ADC$  সদৃশ।

$\therefore BD : AD = AD : DC$  ]

উদা। 2. N is the foot of the perpendicular from a point P of the circle APB upon a diameter AB. Prove that  $PB^2 = AB \cdot NB$ . [C. U. '39]

পরিধিস্থ P বিন্দু হইতে AB ব্যাসের উপর PN লম্ব টানা হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে,  $PB^2 = AB \cdot NB$ . AP ও BP যোগ কর।



৪৮নং চিত্র

প্রমাণ :  $\because$  AB ব্যাস,  $\therefore \angle APB$  অর্ধবৃত্তস্থ কোণ বলিয়া সমকোণ। আবার  $PN \perp AB$ ,  $\therefore \triangle APB$  ও  $\triangle PNB$  সদৃশ।

$$\therefore \frac{AB}{PB} = \frac{PB}{NB} \quad \therefore PB^2 = AB \cdot NB.$$

উদা। 3. If a perpendicular is drawn from the right angle of a right-angled triangle to the hypotenuse and if the sides of the right-angled triangle are in continued proportion, the greater segment of the hypotenuse is equal to the smaller side of the triangle. [C. U. '39]

[ ৪৬নং চিত্র আঁক ] মনে কর, ABC সমকোণী ত্রিভুজের  $\angle A$  সমকোণ, অতিভুজ BCর উপর AD লম্ব এবং  $AB : AC = AC : BC$ . যদি ত্রিভুজটির AB বাহু ক্ষুদ্রতম হয় এবং  $CD > DB$  হয়, তবে প্রমাণ কর যে  $CD = AB$ .

প্রমাণ :  $\triangle ACD$  ও  $\triangle ABC$  সদৃশ,  $\therefore \frac{CD}{AC} = \frac{AC}{BC}$

কিন্তু  $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC}$  (স্বীকার),  $\therefore \frac{CD}{AC} = \frac{AB}{AC} \therefore CD = AB$ .

উদা. 4. Find geometrically the value of  $\sqrt{5}$ .

[ ৪৭নং চিত্র দেখ ]  $AC=5$  একক লও। উহা হইতে  $AB=1$  একক কাটিয়া লও।  $AB$  ও  $AC$ র মধ্য সমান্তরপাতী  $AD$  অঙ্কন কর। এক্ষণে  $\therefore AD$  রেখা  $AB$  ও  $AC$ র মধ্য সমান্তরপাতী,  $\therefore AD^2=AB.AC=5.1$  বা  $5$  বর্গ একক।  $\therefore AD = \sqrt{5}$  দৈর্ঘ্য একক। অতএব  $AD$  দৈর্ঘ্যই  $\sqrt{5}$ এর জ্যামিতিক মান।

[ উদ্যোক্তা :  $\sqrt{15} = \sqrt{5 \times 3}$ , হতরাং  $5$  ও  $3$  এককের মধ্য সমান্তরপাতীই  $\sqrt{15}$  এর মান হইবে।  $\sqrt{34} = \sqrt{6.8 \times 5}$  ধরিতে হয়। ]

### Exercise 5

- 1<sup>o</sup> Find the mean proportional between 3 and 4".
- 2<sup>o</sup> Find Geometrically the values of  $\sqrt{35}$  and  $\sqrt{26}$ .
3. In a right-angled triangle, if a perpendicular be drawn from the right angle to the hypotenuse, the segments of the hypotenuse are in the duplicate ratio of the sides containing the right angle.
4. Two circles intersect at A and B, and at A tangents are drawn, one to each circle, to meet the circumferences at P and Q. Show that  $AB^2=BP.BQ$ .
5. In  $\triangle ABC$  and  $\triangle DEF$ ,  $\angle A = \angle D$ ; prove that  $\triangle ABC : \triangle DEF = BA.AC : ED.DF$ . [C. U. '47]
6. Two circles of radii  $r, p$  respectively touch externally at A, and a common tangent touches them at P and Q. Prove that  $PQ^2 = 4pr$ .
7. If two triangles have one angle of the one equal to one angle of the other, prove that the areas are proportional to the rectangles contained by the sides that include the angle. [ W. B. S. F. '53 ]

## উপপাত্ত 11

The ratio of the areas of two triangles of equal altitude is equal to the ratio of their bases.

[ সমান উচ্চতাবিশিষ্ট ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফল উহাদের ভূমির সমানুপাতী হইবে। ]

$\triangle ABC$  ও  $\triangle DEF$  এর ভূমি  
BC ও EF এবং  $h$  উহাদের উচ্চতা।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$\triangle ABC : \triangle DEF = BC : EF.$$

প্রমাণ :  $\triangle ABC = \frac{1}{2} \text{ ভূমি} \times \text{উচ্চতা}$

৪২নং চিত্র

$$= \frac{1}{2} BC \cdot h \text{ এবং } \triangle DEF = \frac{1}{2} EF \cdot h.$$

$$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{\frac{1}{2} BC \cdot h}{\frac{1}{2} EF \cdot h} = \frac{BC}{EF}.$$

## উপপাত্ত 12

The ratio of the areas of two similar triangles is equal to the ratio of the squares on corresponding sides.

[ C. U. '36, '39, '40, '43, '45, '47, '48, '51 ; D. B. '39, '40, '41, '43, '45, '46, '48 ; G. U. '49, '51 ; S. F. '63 ]

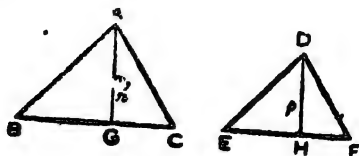
Or, Similar triangles are to one another in the duplicate ratio of their homologous sides

[ সদৃশ ত্রিভুজগুলির ক্ষেত্রফলের অনুপাত উহাদের অনুরূপ বাহুর বর্গের অনুপাতের সমান হয়। ]

মনে কর, ABC ও DEF দুইটি  
সদৃশ ত্রিভুজ এবং উহাদের BC  
ও EF অনুরূপ বাহু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে

$$\triangle ABC : \triangle DEF = BC^2 : EF^2.$$



৪০নং চিত্র

অঙ্কন : BC ও EF এর উপর যথাক্রমে AG ও DH লম্ব টান, এবং মনে কর,  $AG = h$  একক এবং  $DH = p$  একক।  $h$  ও  $p$  ত্রিভুজদ্বয়ের উচ্চতা।

প্রমাণ :  $\triangle ABC = \frac{1}{2}BC \cdot h$  এবং  $\triangle DEF = \frac{1}{2}EF \cdot p$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2}BC \cdot h \quad BC \cdot h$$

$$\triangle DEF = \frac{1}{2}EF \cdot p = EF \cdot p$$

একদিকে,  $\triangle ABG$  ও  $\triangle DEH$  এর  $\angle B = \angle E$  এবং  $\angle AGB = \angle DHE$  (সমকোণ বলিয়া),  $\therefore$  অবশিষ্ট  $\angle BAG =$  অবশিষ্ট  $\angle EDH$ .

ঐ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী, সুতরাং সদৃশ।

$$\therefore \frac{h}{p} = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} \quad (\because \triangle ABC \text{ ও } \triangle DEF \text{ সদৃশ।})$$

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{BC}{EF} \cdot \frac{h}{p} = \frac{BC}{EF} \cdot \frac{BC}{EF} = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2$$

[ জটব্য :  $\frac{a^2}{b^2}$  কে  $\frac{a}{b}$  এর duplicate ratio বলে, Homologous = corresponding ]

### বিবিধ সমাধান (7)

উদা. 1 Show that every quadrilateral is divided by its diagonals into four triangles whose areas are proportional [ D. B. '42 ]

মনে কর, ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।  
প্রমাণ করিতে হইবে যে,  $\triangle AOB : \triangle BOC = \triangle AOD : \triangle COD$ .

প্রমাণ :  $\triangle AOB$  ও  $\triangle BOC$ এর উচ্চতা একই,

$$\triangle AOB : \triangle BOC = AO : CO. \text{ অতরূপে, } \triangle AOD : \triangle COD = AO : CO$$

$$\triangle AOB : \triangle BOC = \triangle AOD : \triangle COD.$$

উদা. 2. Any triangle described on a diagonal of a square is double the similar triangle described on the side of the square.

[ চিত্র আঁকিয়া লও। ] মনে কর, ABCD বর্গক্ষেত্রের AC কর্ণ ও AB বাহুর উপর যথাক্রমে AEC ও ABF ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ ত্রিভুজ আঁকা হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে,  $\triangle AEC = 2\triangle ABF$ .

প্রমাণ :  $\therefore \triangle AEC$  ও  $\triangle ABF$  সদৃশ,

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\triangle AEC}{\triangle ABF} &= \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{AB^2 + BC^2}{AB^2} \quad (\angle ABC \text{ সমকোণ}) \\ &= \frac{2AB^2}{AB^2} = 2 \quad \therefore \triangle AEC = 2\triangle ABF. \end{aligned}$$

উদা. 3. ABC is a triangle right-angled at A and AD is drawn perpendicular to BC. Show that  $\triangle ABD \cdot \triangle ACD = AB^2 : AC^2$

[ ৪৬নং চিত্র আঁক ]  $\triangle ABD$  ও  $\triangle ACD$  এর

$\angle ADB = \angle ADC$  ( সমকোণ ),  $\angle B = \angle CAD$  এবং  $\angle BAD = \angle C$ ,  
সুতরাং AB ও AC দুইটি অনুরূপ বাহু।  $\therefore$  ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

$$\therefore \triangle ABD : \triangle ACD = AB^2 : AC^2$$

উদা. 4. Show that any given triangle is divided into 4 equal parts by the st. lines joining the middle points of its sides. [ C. U '11, '40 ]

[ চিত্র আঁকিয়া লও ] মনে কর,  $\triangle ABC$ র AB, BC ও ACর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F. DE, EF ও FD যোগ করা হইল। প্রমাণ করিতে হইবে যে,  $\triangle ADF$ ,  $\triangle BDE$ ,  $\triangle ECF$  ও  $\triangle DEF$  এর ক্ষেত্রফল সমান।

প্রমাণ :  $\therefore DF \parallel BC$ ,  $\therefore \angle ADF =$  অনুরূপ  $\angle B$  এবং  $\angle AFD =$  অনুরূপ  $\angle C$ .  $\therefore \triangle ADF$  ও  $\triangle ABC$  সদৃশ,

$$\therefore \frac{\triangle ADF}{\triangle ABC} = \frac{AD^2}{AB^2} = \frac{AD^2}{(2AD)^2} = \frac{AD^2}{4AD^2} = \frac{1}{4}.$$

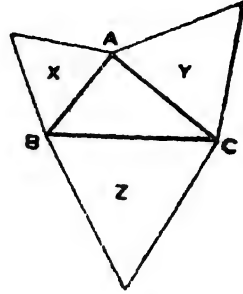
$\therefore \triangle ADE = \frac{1}{4} \triangle ABC$ . অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে,  $\triangle DBE$  ও  $\triangle ECF$  প্রত্যেকে  $= \frac{1}{4} \triangle ABC$ , সুতরাং অবশিষ্ট  $\triangle DEF = \frac{1}{4} \triangle ABC$ .

$\therefore \triangle ABC$  চারিটি সমান অংশে বিভক্ত হইয়াছে।

উদা. 5. Equilateral triangles are described on the sides of a right-angled triangle. Prove that the area of the

triangle on the hypotenuse is equal to the sum of the areas of the other two triangles. [C. U. '19, '21, '31]

মনে কর, ABC ত্রিভুজের  $\angle A$  সমকোণ।  
ইহার AB, AC ও BC বাহুর উপর যথাক্রমে  
X, Y ও Z সমবাহু ত্রিভুজ আঁকা হইল।  
প্রমাণ করিতে হইবে যে,  $Z = X + Y$ ।



৫১ নং চিত্র

প্রমাণ :  $\because$  X, Y ও Z তিনটি সমবাহু।  
ত্রিভুজ,  $\therefore$  উহাদের প্রত্যেক কোণ  $60^\circ$ ,  
সুতরাং উহারা সদৃশকোণী ও সদৃশ ত্রিভুজ।

$$\therefore \frac{X}{Z} = \frac{AB^2}{BC^2} \text{ এবং } \frac{Y}{Z} = \frac{AC^2}{BC^2}$$

$$\therefore \frac{X+Y}{Z} = \frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2}$$

$$\text{অর্থাৎ } \frac{X+Y}{Z} = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2} = \frac{BC^2}{BC^2} \quad [\because \angle A = \text{সমকোণ}] = 1.$$

$$\therefore X + Y = Z.$$

উদা. 6. Draw an equilateral triangle equal to the sum of two given equilateral triangles. [D. B. '46]

[ Hints : মনে কর,  $\triangle ABC$  ও  $\triangle DEF$  দুইটি প্রদত্ত সমবাহু ত্রিভুজ।  
একটি সরল রেখা  $PQ = BC$  লও।  $PR \perp PQ$  টান, যেন  $PR = EF$  হয়।

QR যোগ কর, QR-এর উপর অঙ্কিত সমবাহু ত্রিভুজই নির্ণেয় ত্রিভুজ হইবে।  
প্রমাণের জন্য উপরে উদা. 5 দেখ। ]

উদা. 7. Draw an equilateral triangle equal to the difference of two given equilateral triangles. [C. U. '45]

[ Hints : মনে কর,  $\triangle ABC$  ও  $\triangle DEF$  দুইটি প্রদত্ত সমবাহু ত্রিভুজের মধ্যে  
 $\triangle ABC$  বৃহত্তর। সরল রেখা  $KM = EF$  লও এবং  $MP \perp KM$  টান। Kকে কেন্দ্র  
করিয়া BC ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ আঁক, উহা যেন MPকে N বিন্দুতে  
ছেদ করিল। MNএর উপর অঙ্কিত MNR সমবাহু ত্রিভুজই নির্ণেয় ত্রিভুজ। ]

প্রমাণ : এখানে ত্রিভুজ তিনটি সমবাহ হওয়ার উহারা সদৃশকোণী ও সদৃশ।

$$\therefore \frac{\Delta ABC}{\Delta MNR} = \frac{BC^2}{MN^2} \text{ এবং } \frac{\Delta DEF}{\Delta MNR} = \frac{EF^2}{MN^2}.$$

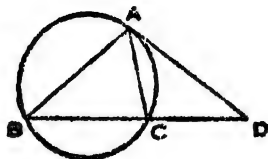
$$\therefore \frac{\Delta ABC - \Delta DEF}{\Delta MNR} = \frac{BC^2 - EF^2}{MN^2} = \frac{KN^2 - KM^2}{MN^2}$$

$$= \frac{MN^2}{MN^2} (\because \angle M \text{ সমকোণ}) = 1. \therefore \Delta MNR = \Delta ABC - \Delta DEF.]$$

উদা. 8. ABC is a triangle inscribed in a circle. If the tangent at A meets BC produced in D, prove that

$$CD : BD = AC^2 : AB^2. \quad [C. U. '28, '39, '51 ; G. U. '51]$$

$\Delta ABC$  বৃত্তস্থ, বৃত্তের A বিন্দুতে AD স্পর্শক। বর্ধিত BC, ঐ স্পর্শককে D বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে  $CD : BD = AC^2 : AB^2$ .



এমন চিত্র

প্রমাণ :  $\Delta ACD$  ও  $\Delta ABD$  এর  $\angle D$  সাধারণ, এবং  $\angle DAC =$  একান্তর বৃত্তাংশস্থ  $\angle ABC$ ,  $\therefore$  উহারা সদৃশ ত্রিভুজ।

$\therefore \Delta ACD : \Delta ADB = AC^2 : AB^2$ . আবার,  $\therefore \Delta ACD$  ও  $\Delta ABD$ র উচ্চতা সমান,  $\Delta ACD : \Delta ABD = CD : BD$ .

অতএব,  $CD : BD = AC^2 : AB^2$ .

উদা. 9. Prove that the areas of similar triangles have the same ratio as the squares on corresponding medians.

[D. B. '38]

[চিত্র নিজে আঁক] মনে কর, ABC ও DEF দুইটি সদৃশ ত্রিভুজের যথাক্রমে AG ও DH দুইটি মধ্যমা। প্রমাণ করিতে হইবে যে  $\Delta ABC : \Delta DEF = AG^2 : DH^2$ .

$$\text{প্রমাণ : } \therefore \Delta ABC \text{ ও } \Delta DEF \text{ সদৃশ, } \therefore \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{2BG}{2EH} = \frac{BG}{EH}.$$

এখন  $\Delta ABG$  ও  $\Delta DEH$  এর  $\angle B = \angle E$  এবং  $\frac{AB}{DE} = \frac{BG}{EH}$ ,

$$\therefore \text{ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ,} \therefore \frac{AG}{DH} = \frac{AB}{DE}.$$

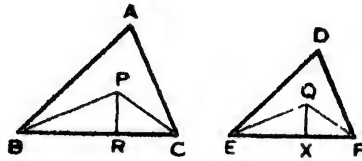
$$\text{একপক্ষে, } \frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{AG^2}{DH^2}.$$

উদা. 10. If two triangles are similar, their areas are proportional to the squares on their corresponding altitudes.

$$[ \text{Hints : ধর } h \text{ ও } p \text{ দুইটি উচ্চতা। } \frac{h}{p} = \frac{BC}{EF}, \therefore \frac{h^2}{p^2} = \frac{BC^2}{EF^2} = \frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} ]$$

উদা. 11. Prove that similar triangles are to one another as the squares on the radii of their in-circles. [C. U. '40]

মনে কর, ABC ও DEF দুইটি সদৃশ ত্রিভুজ,  $\angle B$  ও  $\angle C$  এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় P বিন্দুতে ছেদ করিল এবং  $PR \perp BC$  টানা হইল। এখন P বিন্দু  $\Delta ABC$ র অন্তঃকেন্দ্র এবং PR অন্তর্ব্যাসার্ধ হইল। অনুরূপে  $\Delta DEF$  এর Q অন্তঃকেন্দ্র এবং QX অন্তর্ব্যাসার্ধ।



৫৩নং চিত্র

$$\text{প্রমাণ করিতে হইবে যে } \Delta ABC : \Delta DEF = PR^2 : QX^2.$$

প্রমাণ :  $\angle PBC = \frac{1}{2} \angle ABC$  এবং  $\angle QEF = \frac{1}{2} \angle DEF$ , কিন্তু  $\angle ABC = \angle DEF$ ,  $\therefore \angle PBC = \angle QEF$ ; অনুরূপে  $\angle PCB = \angle QFE$ .  $\therefore \Delta PBC$  ও  $\Delta QEF$  সদৃশকোণী।  $PB : QE = BC : EF$ . আবার  $\Delta BPR$  ও  $\Delta EQX$  এর  $\angle PBR = \angle QEX$  এবং  $\angle PRB = \angle QXE$  (সমকোণ),  $\therefore$  ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী,  $\therefore PR : QX = BP : QE$ .

$$\text{অতএব, } PR : QX = BC : EF. \text{ একপক্ষে, } \frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \frac{BC^2}{EF^2} = \frac{PR^2}{QX^2}.$$

উদা. 12. Prove that similar triangles are to one another as the squares on the radii of their circum-circles.

[C. U. '30, '36; D. B. '43]

[বিবিধ সমাধান (4) এর উদা. 5 দেখ। এই অনুসারে প্রথমে প্রমাণ কর

$$\text{যে, } \frac{SB}{S'E} = \frac{BC}{EF}. \therefore \Delta ABC : \Delta DEF = BC^2 : EF^2 = SB^2 : S'E^2.]$$



উদা. 13. If DE is drawn parallel to the base BC of a triangle ABC and if  $AD : DB = 3 : 2$ , find the ratio of  $\triangle ADE : \text{fig. DBCE}$ . [চিত্র আঁকিয়া লও]

$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{3}{2}, \therefore \frac{DB}{AD} = \frac{2}{3}, \therefore \frac{DB+AD}{AD} = \frac{2+3}{3}, \therefore \frac{AB}{AD} = \frac{5}{3}$$

একশ্রেণি,  $\therefore DE \parallel BC, \therefore \angle ADE = \angle B, \angle AED = \angle C,$

$\therefore$  ত্রিভুজ ABC ও DEF সদৃশকোণী, সুতরাং সদৃশ।

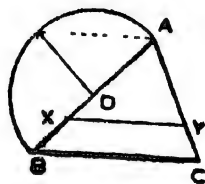
$$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle ADE} = \frac{AB^2}{AD^2} = \frac{5^2}{3^2} = \frac{25}{9}; \therefore \frac{\triangle ABC - \triangle ADE}{\triangle ADE} = \frac{25 - 9}{9}$$

$$\therefore \frac{\text{ক্ষেত্র DBCE}}{\triangle ADE} = \frac{16}{9}, \therefore \triangle ADE : \text{ক্ষেত্র DBCE} = 9 : 16.$$

উদা. 14. Bisect a triangle by a straight line drawn parallel to the base. [C. U. '16, '32, '50, D. B. '46]

ABC একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ। ভূমি BC-র সমান্তরাল সরলরেখা টানিয়া ত্রিভুজটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : ABCকে D বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। AD ও ABর মধ্য সমান্তরপাতীর সমান AX অংশ কাটিয়া লও। X হইতে BCর সমান্তরাল XY টান, উহা যেন ACকে Y বিন্দুতে ছেদ করিল। ABC ত্রিভুজ XY দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইল।



৫৪নং চিত্র

প্রমাণ :  $\therefore XY \parallel BC, \therefore \triangle AXY$  ও  $\triangle ABC$  সদৃশকোণী, সুতরাং উহার সদৃশ। আবার,  $\therefore AX, AD$  ও  $AB$ এর মধ্যসমান্তরপাতী,  $\therefore AX^2 = AD \cdot AB.$

$$\text{একশ্রেণি, } \frac{\triangle AXY}{\triangle ABC} = \frac{AX^2}{AB^2} = \frac{AD \cdot AB}{AB^2} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2} \quad (\because D, AB\text{র মধ্যবিন্দু})$$

$\therefore \triangle AXY = \frac{1}{2} \triangle ABC$ ; সুতরাং  $\triangle ABC$ , XY দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে।

## Exercise 6

1. The area of the  $\triangle ABC$  is 19.6 sq. cm. and  $XY$ , drawn parallel to  $BC$ , cuts  $AB$  in the ratio 4 : 3. Find the area of the  $\triangle AXY$ . [উত্তর : 6.4 sq. cm.]

2. Two equiangular triangles have areas in the ratio of 3 : 2 and an altitude of the greater is 5.2 cm. What is the corresponding altitude of the other? [C. U. '35]

3. If  $PQ$  is drawn parallel to  $BC$ , the base of the  $\triangle ABC$ , and if  $\triangle APQ : \text{fig. } PBCQ = 4 : 5$ , show that  $AP : BP = 2 : 1$ .

4. Show how to draw a st. line  $XY$  parallel to  $BC$ , the base of a triangle  $ABC$ , so that the area of the  $\triangle AXY$  may be  $\frac{9}{16}$ th of the  $\triangle ABC$ . [C. U. '26]

5. A trapezium  $ABCD$  has its sides  $AB$ ,  $CD$  parallel and its diagonals intersect at  $P$ . If  $AB$  is double of  $CD$ , find the ratio of the  $\triangle APB$  to the  $\triangle PCD$ .

6. Triangles on the same base are to one another as the segments into which the join of their vertices is divided by the base.

7. Two triangles stand on equal bases and between the same parallels and a st. line is drawn parallel to their bases, show that it cuts off equal areas from the two triangles.

8. Prove that if similar triangles are drawn on the sides of a right-angled triangle, the area of the triangle described on the hypotenuse is equal to the sum of the areas of the other two triangles. [C. U. 45, '48]

9. The sides  $DA$ ,  $CB$  of a cyclic quadrilateral  $ABCD$  are produced to meet in  $O$ . If  $AB = \frac{1}{2} CD$ , then the quadrilateral is three times the triangle  $OAB$ .

10.  $\triangle DEF$  is the pedal triangle of the  $\triangle ABC$ . Prove that  $\triangle ABC : \triangle DBF = AB^2 : BD^2$ . [W. B. S. F. '50]

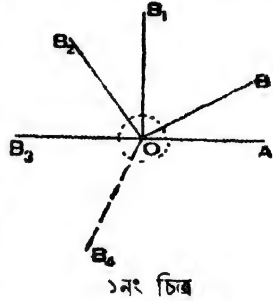
11. Bisect a triangle by a straight line perpendicular to one of the sides.

## তৃতীয় অধ্যায়

### Trigonometry (ত্রিকোণমিতি).

64. ত্রিকোণমিতি—ত্রিভুজের তিনটি কোণ থাকায় উহাকে 'ত্রিকোণ'ও বলা যায়। গণিতশাস্ত্রের যে শাখায় সমতলে অঙ্কিত ত্রিভুজের তিনটি কোণ ও তিনটি বাহুর পরিমাপ ও সম্বন্ধ বিষয়ে আলোচনা করা হইয়াছে তাহাকে 'ত্রিকোণমিতি' বসে। ইহা জ্যামিতির একটি বিশিষ্ট শাখা। ইহার আলোচ্য বিষয় অধিকতর ব্যাপক।

65. জ্যামিতিক ও ত্রিকোণমিতিক কোণ—ত্রিকোণমিতিক কোণ জ্যামিতিক কোণ অপেক্ষা অধিকতর ব্যাপক। মনে কর, OB সরল রেখা Oকে কেন্দ্র করিয়া OA অবস্থান হইতে ঘড়ির কাঁটা যে দিকে ঘোরে তাহার বিপরীত দিকে (anti-clockwise) ঘুরিতে লাগিল। OB প্রথমে AOB সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করিয়া যখন OAএর সহিত লম্বভাবে দাঁড়াইবে তখন AOB<sub>1</sub> কোণটি সমকোণ (90°) হইবে। OB আরও কিছু ঘুরিয়া গেলে AOB<sub>2</sub> কোণটি মূলকোণ হইবে। এইভাবে ঘুরিয়া OB যখন OAএর ঠিক বিপরীত দিকে এক সরল রেখায় অবস্থিত হইবে তখন AOB<sub>3</sub> কোণটি



সরল কোণ বা দুই সমকোণ (180°) হইবে। আরও ঘুরিলে AOB<sub>4</sub> কোণটি প্রবৃত্ত কোণ (Reflex angle) হইবে। আর OB যখন সম্পূর্ণ একবার ঘুরিয়া OA-এর সহিত মিলিত হইবে, তখন সমগ্র AOB কোণটি চার সমকোণ (360°) উৎপন্ন করিবে।

জ্যামিতিতে আমরা এই পর্যন্ত কোণের আলোচনা করিয়া থাকি, এবং এই পর্যন্ত জ্যামিতিক ও ত্রিকোণমিতিক কোণের মধ্যে কোন অমিল নাই।

এখন যদি মনে করি যে, OB রেখাটি সম্পূর্ণ একপাক অপেক্ষা কিছু বেশী ঘুরিয়া পূর্বের OB অবস্থানে গেল, তখন যে AOB কোণটি উৎপন্ন হইল, তাহা 4 সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর। ত্রিকোণমিতিতে এইভাবে ক্রমশঃ আরও বৃহত্তর কোণ উৎপন্ন হইতে পারে; কিন্তু জ্যামিতিতে 4 সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর কোণ ধরা হয় না।

66. ধনাত্মক ও ঋণাত্মক কোণ—পূর্বে দেখানো হইয়াছে যে OB রেখা ঘড়ির কাঁটার বিপরীতক্রমে (anti-clockwise) ঘুরিয়া কোণগুলি উৎপন্ন করিয়াছে। এই কোণগুলিকে ধনাত্মক (positive) কোণ বলে। আবার OB রেখা ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘোরে সেইদিকে ঘুরিলে যে কোণগুলি উৎপন্ন হয় সেইগুলিকে ঋণাত্মক (negative) কোণ বলা হয়।

67. কোণের পরিমাণ—কোন কোণের মান বা পরিমাণ নির্ণয়ের তিনটি প্রণালী (system) আছে। যথা—(1) যাটিক পদ্ধতি (sexagesimal system), (2) শতক পদ্ধতি (centesimal system), (3) বৃত্তীয় পদ্ধতি (circular system)।

68. যাটিক পদ্ধতি—সমকোণ একটি ক্রবক কোণ। এই পদ্ধতিতে এক সমকোণকে কোণের একক ধরা হয় এবং উহাকে 90 সমান ভাগে বিভক্ত করিলে প্রতি অংশ এক ডিগ্রী (degree) হয়। এক ডিগ্রীকে 60 সমান ভাগ করিলে প্রতি ভাগকে এক মিনিট (minute) এবং এক মিনিটের 60 সমান ভাগের এক ভাগকে এক সেকেন্ড (second) বলা হয়।

$$60'' \text{ সেকেন্ড} = 1' \text{ মিনিট}$$

$$60' \text{ মিনিট} = 1^\circ \text{ ডিগ্রী}$$

$$90^\circ \text{ ডিগ্রী} = 1 \text{ সমকোণ}।$$

69. শতক পদ্ধতি—এই পদ্ধতিতেও সমকোণকে কোণের একক ধরা হয়। এক সমকোণকে 100 সমান ভাগ করিয়া এক অংশকে এক গ্রেড (grade) বলা হয়। এক গ্রেডকে 100 সমান ভাগ করিলে এক অংশকে এক মিনিট এবং এক মিনিটের 100 সমান ভাগের এক ভাগকে এক সেকেন্ড বলে।

$$100'' \text{ সেকেন্ড} = 1' \text{ মিনিট}$$

$$100' \text{ মিনিট} = 1^\circ \text{ গ্রেড}$$

$$100^\circ \text{ গ্রেড} = 1 \text{ সমকোণ}।$$

[জ্যেষ্ঠব্যঃ যাটিক ও শতক এই উভয় পদ্ধতিতেই মিনিট ও সেকেন্ড আছে; সুতরাং উহাদের প্রতীক চিহ্নগুলি বিশেষভাবে লক্ষ্য কবিত্তে হইবে।

1'' এইরূপ চিহ্নবিশিষ্ট কোণদ্বারা যাটিক পদ্ধতির এক সেকেন্ড এবং 1'' এই চিহ্নযুক্ত কোণদ্বারা শতক পদ্ধতির এক সেকেন্ড বুঝায়। অত্বরূপে 1' এই চিহ্ন দ্বারা যাটিক পদ্ধতির এক মিনিট এবং 1' এই চিহ্ন দ্বারা শতক পদ্ধতির এক মিনিট বুঝায়।]

70. বস্তুিক ও শতক মানের পরস্পর সম্বন্ধ—

$$90^\circ = 1 \text{ সমকোণ} = 100^\circ, \therefore 9^\circ = 10^\circ, \therefore 1^\circ = \frac{10^\circ}{9}.$$

$$\text{অনুরূপে } 1^\circ = \frac{9^\circ}{10}.$$

**জ্যেষ্ঠ নিয়ম :** এক পদ্ধতির মানে প্রকাশিত কোণকে অন্য পদ্ধতির মানে প্রকাশ করিতে হইলে, প্রদত্ত কোণকে এক সমকোণের দশমিকে পরিণত করিয়া তৎপরে নূতন মানে পরিণত করিতে হয়। নিম্নের উদাহরণগুলি দেখ।

উদা. 1. Express  $51036''$  in degrees, minutes and seconds.

$$\begin{array}{r} 60 \overline{)51036''} \left( \begin{array}{r} 850' \\ 480 \\ \hline 303 \\ 300 \\ \hline 36'' \end{array} \right. \quad \begin{array}{r} 60 \overline{)850'} \left( \begin{array}{r} 14^\circ \\ 60 \\ \hline 250 \\ 240 \\ \hline 10' \end{array} \right. \end{array} \end{array} \therefore 51036'' = 14^\circ 10' 36''.$$

উদা. 2. Express  $10^\circ 36' 24''$  in seconds.

$$\begin{array}{r} 10^\circ 36' 24'' \\ 60 \\ \hline 600' \text{ ----} \\ 36' \\ \hline 636' \\ 60 \\ \hline 38160'' \\ 24'' \\ \hline 38184'' \end{array} \therefore 10^\circ 36' 24'' = 38184''.$$

উদা. 3. Express  $24357''$  in grades, minutes and seconds.

$$\begin{array}{r} 100 \overline{)24357''} \\ 100 \overline{)243 \dots\dots 57''} \\ \hline 2^\circ \dots\dots 43 \end{array} \therefore 24357'' = 2^\circ 43' 57''.$$

উদা. 4. Express  $3^{\circ} 9' 74''$  in seconds.

$$\begin{array}{r} 3^{\circ} 9' 74'' \\ 100 \quad \cdot \\ \hline 300' \\ 9' \\ \hline 309' \\ 100 \\ \hline 30900'' \\ 74'' \\ \hline 30974'' \end{array}$$

$$\therefore 3^{\circ} 9' 74'' = 30974''$$

উদা. 5. Express  $56^{\circ} 20' 24''$  in grades, minutes and seconds.

$$\begin{aligned} 56^{\circ} 20' 24'' &= 56^{\circ} 20' \frac{24}{60} = 56^{\circ} 20' 4'' = 56^{\circ} \frac{20 \cdot 4}{60} = 56^{\circ} \frac{2 \cdot 04}{6} = 56^{\circ} 34' \\ &= \frac{56 \cdot 34}{90} \text{ সমকোণ} = 626 \text{ সমকোণ} = 626 \times 100 \text{ গ্রেড} \\ &= 62^{\circ} 6' = 62^{\circ} 60' \end{aligned}$$

উদা. 6. Express  $30^{\circ} 45' 30''$  in centesimal system.

$$\begin{aligned} 30^{\circ} 45' 30'' &= 30 + \left(45 + \frac{30 \cdot 6}{60}\right)' = 30 + (45 + 51)' \\ &= 30 + 45 \cdot 51' = \left(30 + \frac{45 \cdot 51}{60}\right)^{\circ} = (30 \cdot 7585)^{\circ} \\ &= \frac{30 \cdot 7585}{90} \text{ সমকোণ} \\ &= 341761 \text{ সমকোণ} \\ &\quad \times 100 \\ &= 341761^{\circ} \\ &\quad \times 100 \\ &= 1761^{\circ} \quad [1761 \times 100 \text{ করিয়া}] \\ &\quad \times 100 \\ &= 61^{\circ} \quad [61 \times 100 \text{ করিয়া}] \\ 30^{\circ} 45' 30'' &= 34^{\circ} 17' 61'' \end{aligned}$$

উদা. 7. Express  $14^{\circ}17'36''$  in right angles.

$$14^{\circ}17'36'' = 14^{\circ}17'36'' = 14 \cdot 1736^{\circ} = \cdot 141736 \text{ সমকোণ।}$$

[জটিল্য :  $36''$ কে মিনিটে পরিণত করিবার জন্য 100 দিয়া ভাগ করিলে হয়  $\cdot 36$ , স্তত্রাং  $17'36''$  মিনিট হইল। উহাকে 100 ভাগ করিলে হয়  $\cdot 1736$  গ্রেড, স্তত্রাং  $14 \cdot 1736$  গ্রেড হইল। উহাকে 100 ভাগ করিয়া হইল  $\cdot 141736$  সমকোণ। অতএব দেখা গেল যে, সেকেন্ডের সংখ্যার ডানদিক হইতে দুই অঙ্ক বামে দশমিক বিন্দু বসাইলে উহা মিনিটে পরিণত হয়; এইরূপে মিনিটের সংখ্যার দুই অঙ্ক বামে দশমিক বিন্দু বসাইলে গ্রেডে এবং গ্রেডের সংখ্যার দুই অঙ্ক বামে দশমিক বিন্দু বসাইলে সমকোণে পরিণত হয়। যদি দুই অঙ্ক না থাকিয়া এক অঙ্ক থাকে, তবে উহার বামে শূন্য বসাইয়া তাহার বামে দশমিক বিন্দু বসাইবে।]

উদা. 8. Express  $40^{\circ}8'75''$  in sexagesimal system.

$$40^{\circ}8'75'' = \cdot 400875 \text{ সমকোণ}$$

$$\times 90$$

$$36^{\circ}07875$$

$$\times 60$$

$$\hline 4\ 725'$$

[ $\cdot 07875 \times 60$  করিয়া]

$$\times 60$$

$$\hline 43'5''$$

[ $\cdot 725 \times 60$  করিয়া]

$$\therefore 40^{\circ}8'75'' = 36^{\circ}4'43'5''.$$

71. কোণের বৃত্তীয় মাপ (circular measure)—বৃত্তীয় পদ্ধতিতে এক রেডিয়ানকে (Radian) কোণের একক ধরা হয়।

রেডিয়ান : যে কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান চাপ উহার কেন্দ্রে যে সম্মুখ-কোণ উৎপন্ন করে, তাহাকে এক রেডিয়ান ( $1^{\circ}$ ) বলে। ইহা একটি ধ্রুবক (constant) কোণ এবং ইহার পরিমাপ প্রায়  $57^{\circ}17'44'8''$ .

$4^{\circ}$  বলিলে চার রেডিয়ান কোণ বুঝাইবে।

এই সম্বন্ধে আলোচনার পূর্বে নিম্নের প্রতিজ্ঞাটির জ্ঞান আবশ্যক।

72. প্রতিজ্ঞা : “বৃত্তসমূহের পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত ধ্রুবক”।

[“In all circles the ratio of the circumference to its diameter is always constant.”] [C. U. '48]

Or, “The circumferences of circles are to one another as their radii.”

Or, "The length of the circumference of a circle bears a constant ratio to its diameter "]

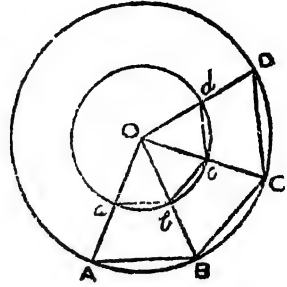
মনে কর, O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং যে কোন দুইটি ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্ত অঙ্কিত করা হইল। R ও r যেন যথাক্রমে উহাদের ব্যাসার্ধ।

প্রথম বৃত্তে ABCD একটি সুষম বহুভুজ অন্তর্লিখিত হইল। মনে কর, ইহার বাহুসংখ্যা n.

এখন, OA, OB, OC... প্রভৃতি যোগ করিলে উহারা দ্বিতীয় বৃত্তকে যথাক্রমে a, b, c, d... প্রভৃতি n-বিন্দুতে ছেদ করিল। ab, bc, cd... যোগ করিলে দ্বিতীয় বৃত্তে abcd... এই সুষম n-ভুজ অন্তর্লিখিত হইবে।

এখন  $\triangle OAB$  ও  $\triangle Oab$ র মধ্যে  $\therefore OA = OB$

এবং  $Oa = Ob$ ,  $\therefore \frac{OA}{Oa} = \frac{OB}{Ob}$  আবার  $\therefore \angle AOB = \angle aOb$ ,



২নং চিত্র

$\therefore$  ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ।  $\therefore \frac{AB}{ab} = \frac{OA}{Oa} = \frac{R}{r}$

এইরূপে  $\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} = \dots = \frac{R}{r} \therefore \frac{AB+BC+CD+\dots}{ab+bc+cd+\dots} = \frac{R}{r}$

অর্থাৎ  $\frac{ABCD \dots \text{বহুভুজের পরিসীমা}}{abcd \dots \text{বহুভুজের পরিসীমা}} = \frac{R}{r} = \frac{ABCD \dots \text{বৃত্তের ব্যাসার্ধ}}{abcd \dots \text{বৃত্তের ব্যাসার্ধ}}$

এখন ABCD বহুভুজটির বাহুসংখ্যা n ক্রমশঃ যত বেশী হইবে AB, BC... ক্রমশঃ তত ছোট হইবে। এইভাবে ক্রমশঃ চরম অবস্থায় (in the limit) বহুভুজের পরিসীমা বৃত্তের পরিধির সহিত মিলিয়া যাইবে বা সমান হইবে।

অতএব,  $\frac{ABCD \dots \text{বৃত্তের পরিধি}}{abcd \dots \text{বৃত্তের পরিধি}} = \frac{ABCD \dots \text{বৃত্তের ব্যাসার্ধ}}{abcd \dots \text{বৃত্তের ব্যাসার্ধ}}$   
 $= \frac{R}{r} = \frac{2R}{2r} = \frac{ABCD \dots \text{বৃত্তের ব্যাস}}{abcd \dots \text{বৃত্তের ব্যাস}} = \text{প্রবক।}$

$\therefore \frac{ABCD \dots \text{বৃত্তের পরিধি}}{ABCD \dots \text{বৃত্তের ব্যাস}} = \frac{abcd \dots \text{বৃত্তের পরিধি}}{abcd \dots \text{বৃত্তের ব্যাস}} = \text{প্রবক।}$



**জটিল্য :** ঐ ধ্রুবক সংখ্যাটি  $\pi$  (পাই) এই গ্রীসীয় অক্ষর দ্বারা সূচিত হয়। ইহা একটি অমের সংখ্যা। ইহার স্থূল মান  $= \frac{22}{7}$  এবং অধিকতর 'আসন্ন' মান  $= \frac{355}{113}$  বা  $3.14159\ldots$ ।

বৃত্তের পরিধি  $= 2\pi r$  ( $r$  = বৃত্তের ব্যাসার্ধ), বৃত্তের কালি  $= \pi r^2$ ।

৭৩. **প্রতিজ্ঞা :** “রেডিয়ান পরিমিত কোণ একটি ধ্রুবক কোণ।”  
( A Radian is a constant angle. )

[ Define a Radian. Show that the Radian is a constant angle. ] [ C. U. '46 ; G. U. '48 ]

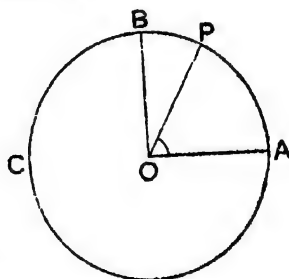
Or, The angle subtended at the centre of a circle by an arc which is equal in length to the radius is constant. ]

মনে কর, APC বৃত্তের কেন্দ্র O এবং চাপ  $AP$  = ব্যাসার্ধ  $OA$  =  $r$ ; সুতরাং  $\angle AOP$  এক রেডিয়ান ( $1^r$ ),

প্রমাণ করিতে হইবে যে,  $\angle AOP$  ধ্রুবক।  
ব্যাসার্ধ  $OB \perp OA$  টান।

এক্ষেপে চাপ  $AB = \frac{1}{4}$  পরিধি।

**প্রমাণ :** কোন বৃত্তের চাপগুলির সম্মুখস্থ কেন্দ্রস্থ কোণগুলির অনুপাত ঐ চাপগুলির দৈর্ঘ্যের অনুপাতের সমান।



৩নং চিত্র

$$\therefore \frac{\angle AOP}{\angle AOB} = \frac{\text{চাপ } AP}{\text{চাপ } AB} = \frac{\text{ব্যাসার্ধ } OA}{\frac{1}{4} \text{ পরিধি}} = \frac{r}{\frac{2\pi r}{4}} = \frac{2}{\pi}$$

$$\therefore \frac{\angle AOP}{1 \text{ সমকোণ}} = \frac{2}{\pi}, \quad \therefore \angle AOP = \frac{2}{\pi} \text{ সমকোণ},$$

অর্থাৎ এক রেডিয়ান  $= \frac{2}{\pi}$  সমকোণ = ধ্রুবক।

[ **জটিল্য :**  $1^r = \frac{2}{\pi}$  সমকোণ  $= \frac{180^\circ}{\pi}$ ,  $\pi^r = 2$  সমকোণ  $= 180^\circ$ ,

$\pi^r = 1$  সমকোণ। ]

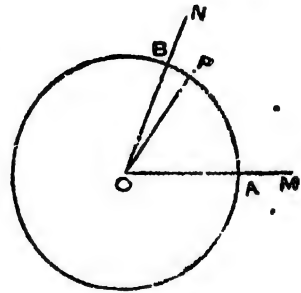
74. প্রতিজ্ঞা : “কোন বৃত্তের কোন চাপ ও ব্যাসার্ধের অনুপাত ঐ চাপ-সম্মুখস্থ কেন্দ্রস্থ কোণের বৃত্তীয় মান হইবে।”

The circular measure of an angle is equal to the ratio of the arc of any circle subtending that angle at its centre to the radius of the circle.

Or, Prove that the radian measure of any angle at the centre of a circle is expressed by the fraction  $\frac{\text{subtending arc}}{\text{radius}}$ .

[ C. U. '40, '47 ]

মনে কর, MON একটি কোণ ; ইহার বৃত্তীয় মান নির্ণয় করিতে হইবে। O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া যে কোন ব্যাসার্ধ (r) লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। উহা যেন OM ও ONকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন  $\angle AOB$ , AB চাপের সম্মুখস্থ কেন্দ্রস্থ কোণ হইল। বৃত্তের ব্যাসার্ধের (r) সমান করিয়া AP চাপ কাটিয়া লও এবং OP যোগ কর। ইহাতে  $\angle AOP = 1$  রেডিয়ান হইল।



৪নং চিত্র

∴ কোন বৃত্তে চাপগুলির সম্মুখস্থ কেন্দ্রস্থ কোণগুলির অনুপাত ঐ চাপগুলির দৈর্ঘ্যের অনুপাতের সমান, ∴  $\frac{\angle AOB}{\angle AOP} = \frac{\text{চাপ AB}}{\text{চাপ AP}} = \frac{\text{চাপ AB}}{r}$

$$\therefore \angle AOB = \frac{\text{চাপ AB}}{r} \times \angle AOP = \frac{\text{চাপ AB}}{r} \times 1 \text{ রেডিয়ান}$$

$$= \frac{\text{চাপ AB}}{r} \text{ রেডিয়ান।}$$

[ জটিল্য : যদি চাপ AB = s, এবং  $\angle AOB = \theta$  রেডিয়ান অর্থাৎ  $\theta^\circ$  হয়, তবে  $\theta = \frac{s}{r}$  হইবে। অর্থাৎ কোণের বৃত্তীয় মান = চাপ ÷ ব্যাসার্ধ।  
বৃত্তের চাপ =  $\theta r$  ; বৃত্তের ক্ষেত্রফল =  $\pi r^2$  ; বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল =  $\frac{1}{2} \theta r^2$  ]

75. তিনটি পদ্ধতির পরস্পর সম্বন্ধ :

$90^\circ = 1$  সমকোণ ।  $100^\circ = 1$  সমকোণ ;  $\frac{\pi^\circ}{2} = 1$  সমকোণ ।

$$\therefore 90^\circ = 100^\circ = \frac{\pi^\circ}{2}, \text{ বা } 180^\circ = 200^\circ = \pi^\circ.$$

মনে কর, কোন একটি কোণের পরিমাণ যষ্টিক পদ্ধতিতে  $D^\circ$ , শতক পদ্ধতিতে  $G^\circ$  এবং উহার বৃত্তীয় মান  $R^\circ$ .

এক্ষেণে,  $\therefore 90^\circ = 1$  সমকোণ,  $\therefore 1^\circ = \frac{1}{90}$  সমকোণ,

$\therefore D^\circ = \frac{D}{90}$  সমকোণ । আবার  $\therefore 100^\circ = 1$  সমকোণ,

$\therefore 1^\circ = \frac{1}{100}$  সমকোণ,  $\therefore G^\circ = \frac{G}{100}$  সমকোণ ।

আবার,  $\therefore \frac{\pi^\circ}{2} = 1$  সমকোণ,  $\therefore 1^\circ = \frac{2}{\pi}$  সমকোণ,

$\therefore R^\circ = \frac{2R}{\pi}$  সমকোণ ।

$$\therefore \frac{D}{90} = \frac{G}{100} = \frac{2R}{\pi}, \quad \therefore \frac{D}{180} = \frac{G}{200} = \frac{R}{\pi}.$$

76. এক পদ্ধতি হইতে অন্য পদ্ধতিতে পরিবর্তন :

$$(1) \therefore 90^\circ = 1 \text{ সমকোণ}, \therefore 1^\circ = \frac{1}{90} \text{ সমকোণ} = \frac{\pi}{180} \text{ রেডিয়ান} = \frac{\pi^\circ}{180}.$$

$$\therefore 90^\circ = 100^\circ, \therefore 1^\circ = \frac{10}{9} \text{ গ্রেড}.$$

$$(2) \therefore 100^\circ = 1 \text{ সমকোণ}, \therefore 1^\circ = \frac{1}{100} \text{ সমকোণ} = \frac{\pi}{200} \text{ রেডিয়ান} = \frac{\pi^\circ}{200}.$$

$$\therefore 100^\circ = 90^\circ, \therefore 1^\circ = \frac{9}{10} \text{ ডিগ্রী}.$$

$$(3) \therefore \pi^\circ = 2 \text{ সমকোণ} = 180^\circ, \therefore 1^\circ = \frac{180}{\pi} \text{ ডিগ্রী} = \frac{180^\circ}{\pi}.$$

$$\therefore \pi^\circ = 2 \text{ সমকোণ} = 200^\circ, \therefore 1^\circ = \frac{200}{\pi} \text{ গ্রেড} = \frac{200^\circ}{\pi}.$$

এই প্রসঙ্গে 70 নং অঙ্কচ্ছেদের উদাহরণগুলি দেখ ।

উদা. 1. Express  $20^\circ$ ,  $36^\circ$ ,  $40^\circ$  and  $6^\circ 25'$  in radians.

$$(ii) \because 180^\circ = \pi^\circ \therefore 1^\circ = \frac{\pi^\circ}{180} \therefore 20^\circ = \frac{\pi^\circ \times 20}{180} = \frac{\pi^\circ}{9}$$

$$(ii) \because 1^\circ = \frac{\pi^\circ}{180} \therefore 36^\circ = \frac{\pi^\circ \times 36}{180} = \frac{\pi^\circ}{5}$$

$$(iii) \because 200^\circ = \pi^\circ \therefore 1^\circ = \frac{\pi^\circ}{200} \therefore 40^\circ = \frac{\pi^\circ \times 40}{200} = \frac{\pi^\circ}{5}$$

$$(iv) 6^\circ 25' = 6.25^\circ = \frac{25^\circ}{4}$$

$$\therefore 1^\circ = \frac{\pi}{200} \text{ রেডিয়ান, } \therefore 6^\circ 25' = \frac{25^\circ}{4} = \frac{\pi^\circ}{200} \times \frac{25}{4} = \frac{\pi^\circ}{32}$$

উদা. 2. Express (a)  $\frac{5}{12}\pi^\circ$  and (b)  $\frac{9}{8}\pi^\circ$  in sexagesimal system.

$$(a) \because 1^\circ = \frac{180}{\pi} \text{ ডিগ্রী, } \therefore \frac{5}{12}\pi^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \times \frac{5\pi}{12} = 75^\circ$$

$$(b) \because \dots = \frac{180^\circ}{\pi} \therefore \frac{9\pi^\circ}{8} = \frac{180^\circ}{\pi} \times \frac{9\pi}{8} = \frac{45 \times 9}{2} \text{ ডিগ্রী} = \frac{405^\circ}{2} \\ = 2 \text{ সমকোণ } 22^\circ 30'$$

উদা. 3. Express  $\frac{\pi^\circ}{12}$  in centesimal system.

$$\therefore 1^\circ = \frac{200^\circ}{\pi} \therefore \frac{\pi^\circ}{12} = \frac{200^\circ}{\pi} \times \frac{\pi}{12} = \frac{50^\circ}{3} = 16.6^\circ = 16^\circ 66' 66''$$

উদা. 4. Express in the three systems of angular measurement the magnitude of the interior angle of a regular pentagon.

যে কোন বহুভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি + 4 সমকোণ = বাহু-সংখ্যার দ্বিগুণ সমকোণ।

$\therefore$  হুয়ম পঞ্চভুজের 5টি সমান অন্তঃকোণের সমষ্টি + 4 সমকোণ = 10 সমকোণ।

$\therefore$  উহার 5টি সমান অন্তঃকোণের সমষ্টি = 6 সমকোণ,

$\therefore$  প্রত্যেক অন্তঃকোণের পরিমাণ =  $\frac{6}{5}$  সমকোণ।

কিন্তু 1 সমকোণ =  $90^\circ = 100^\circ : \pi^\circ$

$$\text{প্রত্যেক অন্তঃকোণ} = \frac{\pi}{5} \times 90^\circ = 108^\circ$$

$$\text{অথবা} = \frac{6}{5} \times 100^\circ = 120^\circ$$

$$\text{অথবা} = \frac{6}{5} \times \frac{\pi^\circ}{2} = 3\pi \text{ রেডিয়ান}$$

উদা. 5. The difference between the two acute angles of a right-angled triangle is  $\frac{\pi}{6}$  radians ; express the angles in degrees.

মনে কর, ABC সমকোণী ত্রিভুজের  $\angle A$  ও  $\angle B$  স্বক্ষকোণ, সুতরাং  $\angle A + \angle B = 90^\circ \dots (1)$ ,

$$\text{এবং } \angle A - \angle B = \frac{\pi}{6} \text{ রেডিয়ান ( স্বীকার )} = \frac{\pi}{6} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 30^\circ \dots (2)$$

এক্ষণে (1) ও (2) যোগ করিয়া পাই  $2\angle A = 120^\circ$ ,  $\therefore \angle A = 60^\circ$ ,  
সুতরাং  $\angle B = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ .

উদা. 6. The angles of a triangle are in A. P., and the greatest is double the least ; express the angles in radians.

[ C. U. '51 ]

মনে কর, ক্ষুদ্রতম কোণটি  $x$  ডিগ্রী, সুতরাং বৃহত্তম কোণটি  $2x$  ডিগ্রী।

$\therefore$  কোণ তিনটি একটি সমান্তর শ্রেণী,

$$\therefore \text{তৃতীয় কোণটি} = \frac{1}{2}(x + 2x) \text{ বা } \frac{3x}{2} \text{ ডিগ্রী।}$$

$$\text{অতএব, } x + \frac{3x}{2} + 2x = 180^\circ, \text{ বা, } \frac{9x}{2} = 180^\circ = \pi \text{ রেডিয়ান}$$

$$\therefore x = \frac{2\pi}{9}. \therefore \text{কোণগুলি যথাক্রমে } \frac{2\pi}{9}, \frac{\pi}{3} \text{ ও } \frac{4\pi}{9} \text{ রেডিয়ান।}$$

77. কোণ পরিমাপ, জন্মক্ষে বিবিধ সমাধান।

উদা. 1. Two angles are in the ratio of 7 : 4 and their difference is  $30^\circ$ . Find the angles.

মনে কর, কোণ দুইটি যথাক্রমে  $7x^\circ$  ও  $4x^\circ$ .

$$\text{অতএব, } 7x^\circ - 4x^\circ = 30^\circ. \therefore 3x^\circ = 30^\circ, \therefore x = 10^\circ.$$

$$\therefore \text{একটি কোণ} = 7x^\circ = 70^\circ \text{ এবং অন্য কোণটি} = 4x^\circ = 40^\circ.$$

উদা. 2. The sum of two angles is 80 grades and their difference is  $18^\circ$ . Find the angles in degrees as well as in grades.

80 গ্রেড =  $80 \times \frac{1}{10}$  ডিগ্রী =  $72^\circ$ . মনে কর, A ও B দুইটি কোণ।

অতএব,  $A + B = 72^\circ$

এবং  $A - B = 18^\circ$

$\therefore 2A = 90^\circ$ ;  $\therefore A = 45^\circ$ , অতএব  $B = 72^\circ - 45^\circ = 27^\circ$ .

আবার,  $45^\circ = 45 \times \frac{10}{9}$  গ্রেড =  $50^g$ , এবং  $27^\circ = 27 \times \frac{10}{9}$  গ্রেড =  $30^g$ .

অতএব, কোণ দুইটি  $45^\circ$  ও  $27^\circ$ , অথবা  $50^g$  ও  $30^g$ .

উদা. 3. The sum of two angles is  $135^\circ$  and their difference is  $100^g$ . Find the angles in radians. [G. U. '50]

মনে কর, কোণ দুইটি যথাক্রমে  $x$  ও  $y$  ডিগ্রী।

$100^g = 90^\circ$ , সুতরাং  $x + y = 135^\circ$

এবং  $x - y = 90^\circ$

$\therefore 2x = 225^\circ$

$\therefore x = \frac{225^\circ}{2} = 112\frac{1}{2}^\circ$

এবং  $y = 135^\circ - \frac{225^\circ}{2} = 22\frac{1}{2}^\circ$ .

একটি কোণ =  $\frac{225^\circ}{2} = \frac{225}{2} \times \frac{\pi}{180}$  রেডিয়ান =  $\frac{5\pi}{8}$  রেডিয়ান

এবং অত্র কোণটি =  $\frac{45^\circ}{2} = \frac{45}{2} \times \frac{\pi}{180}$  রেডিয়ান =  $\frac{\pi}{8}$  রেডিয়ান।

উদা. 4. Express in degrees the angle whose circular measure is 1.309. Assume  $\pi = 3.1416$ . [C. U. '48]

$\therefore \pi^\circ = 180^\circ$ ,  $\therefore 1^\circ = \frac{180^\circ}{\pi}$ ,

$\therefore 1.309$  রেডিয়ান =  $\frac{180 \times 1.309}{3.1416}$  ডিগ্রী =  $75^\circ$ .

উদা. 5. Two angles of a triangle are  $55^\circ 12' 36''$  and  $64^\circ 47' 24''$ . Find the third angle in centesimal measure. [C. U. '50]

প্রদত্ত কোণদ্বয়ের সমষ্টি  $= 50^\circ 12' 36'' + 64^\circ 47' 24'' = 120^\circ$ ,

কিন্তু ত্রিভুজের কোণ তিনটির সমষ্টি  $= 180^\circ$ ,

$$\therefore \text{নির্ণেয় তৃতীয় কোণটি} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ = 60 \times \frac{1}{9} \text{ গ্রেড} \\ = 2\frac{2}{3} \text{ গ্রেড} = 66\frac{2}{3} \text{ গ্রেড} = 66^\circ 66' 66''.$$

উদা. 6. Express in degrees and minutes and also in grades all the angles of an isosceles triangle in which each of the angles at the base is twelve times the vertical angle.

[C. U. '46]

মনে কর, শীর্ষকোণটি  $x^\circ$ , সুতরাং প্রত্যেক ভূমিসংলগ্ন কোণ  $= 12x^\circ$ ,

$$\therefore x^\circ + 12x^\circ + 12x^\circ = 180^\circ, \text{ বা } 25x^\circ = 180^\circ,$$

$$\therefore x = 7\frac{1}{5} \text{ ডিগ্রী} = 7^\circ 12'. \therefore \text{শীর্ষকোণটি} = 7^\circ 12'$$

এবং প্রত্যেক ভূমিসংলগ্ন কোণ  $= 7^\circ 12' \times 12 = 86^\circ 24'.$

আবার, শীর্ষকোণটি  $= 3\frac{3}{5} \text{ ডিগ্রী} = 3\frac{3}{5} \times \frac{1}{9} \text{ গ্রেড} = 8^\circ$

এবং প্রত্যেক ভূমিসংলগ্ন কোণ  $= 8^\circ \times 12 = 96^\circ.$

উদা. 7. Taking  $\frac{1}{\pi} = .31831$ , show that a radian contains 206265 seconds approximately.

[G. U. '48]

$$\therefore \pi^\circ = 180^\circ, \therefore 1^\circ = 180^\circ \times \frac{1}{\pi} = 180^\circ \times .31831$$

$$= 180 \times .31831 \times 60 \times 60 \text{ সেকেন্ড}$$

$$= 206264.88 \text{ সেকেন্ড} = 206265 \text{ সেকেন্ড ( আসন্ন )।}$$

উদা. 8. The sum of two angles is  $114^\circ$ . If the number of grades in one is equal to the number of degrees in the other, find the circular measure of the angles.

[C. U. '43]

মনে কর, একটি কোণ  $x^\circ$ , সুতরাং অন্য কোণটি  $= x^g = \frac{9x^\circ}{10}$

$$\text{এক্ষেপে, } x^\circ + \frac{9x^\circ}{10} = 114^\circ, \text{ বা } \frac{19x}{10} = 114, \therefore x = \frac{114 \times 10}{19} = 60.$$

$$\therefore \text{একটি কোণ} = 60^\circ = 60 \times \frac{\pi^\circ}{180} = \frac{\pi^\circ}{3},$$

$$\text{এবং অপর কোণটি} = 60^g = 60 \times \frac{x^\circ}{200} = \frac{3x^\circ}{10}.$$

উদা. 9. The angles of a triangle are in the ratio of 2 : 5 : 3. Find the circular measure of the greatest angle. [C. U. '42]

$\triangle ABC$ র কোণগুলির সমষ্টি অর্থাৎ  $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$

এবং  $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 5 : 3$ .

$$\therefore \text{বৃহত্তর } \angle B = \frac{5}{2+5+3} \times \text{কোণসমষ্টি} = \frac{5}{10} \times 180^\circ = 90^\circ = \frac{\pi}{2}.$$

উদা. 10. One angle of a triangle is  $60^\circ$  and the second is  $\frac{\pi}{4}$  radian. Express the third angle in centesimal measure.

[C. U. '47]

$$\text{প্রথম কোণ} = 60^\circ, \text{ দ্বিতীয় কোণ} = \frac{\pi}{4} = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$$

কিন্তু তিনটি কোণের সমষ্টি  $= 180^\circ$

$$\therefore \text{তৃতীয় কোণটি} = 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 75^\circ = 75 \times \frac{1}{9} \text{ গ্রেড} \\ = 83\frac{1}{3} \text{ গ্রেড} = 83^\circ 33' 33''.$$

উদা. 11. The angles of a triangle are in arithmetical progression. If the number of degrees in the greatest angle be same as the number of grades in the least one, find the angles in degrees. [C. U. '44]

$\therefore$  কোণ তিনটি একটি সমান্তর শ্রেণী,

$\therefore$  মনে কর, উহারা যথাক্রমে  $(a-d)$ ,  $a$ ,  $(a+d)$  ডিগ্রী।

ত্রিভুজের কোণ তিনটির সমষ্টি 2 সমকোণ বা  $180^\circ$ ,

$$(a-d) + a + (a+d) = 180^\circ \dots\dots(1)$$

আবার, এখানে ক্ষুদ্রতম কোণ  $(a-d)$  ডিগ্রী এবং বৃহত্তম কোণ  $(a+d)$  ডিগ্রী।  $a-d$  ডিগ্রী  $= \frac{1}{9} (a-d)$  গ্রেড।

$\therefore$  প্রদত্ত সর্ত হইতে  $a+d = \frac{1}{9} (a-d) \dots\dots(2)$  [  $\because$  বলা আছে যে বৃহত্তম কোণের ডিগ্রীর সংখ্যা = ক্ষুদ্রতম কোণের গ্রেডের সংখ্যা। ]

এক্ষেপে (1) হইতে পাই  $a = 180^\circ$ ,  $\therefore a = 60^\circ$ .

(2) হইতে পাই  $60+d = \frac{1}{9} (60-d)$

$$\text{বা, } 540+9d=600-10d, \text{ বা, } 19d=60, \therefore d=\frac{60}{19}.$$



অতএব, কোণ তিনটি যথাক্রমে

$(60 - \frac{1}{2})$  ডিগ্রী,  $60$  ডিগ্রী এবং  $(60 + \frac{1}{2})$  ডিগ্রী  
অর্থাৎ  $59\frac{1}{2}$  ডিগ্রী,  $60$  ডিগ্রী এবং  $60\frac{1}{2}$  ডিগ্রী হইল।

উদা. 12. The radius of a circle is  $6''$ , find the angle subtended at the centre by an arc  $9''$  in length.

আমরা জানি চাপ  $= r\theta$ , এখানে চাপ  $= 9''$ ,  $r = 6''$  এবং  $\theta$  কেন্দ্রস্থ কোণের বৃত্তীয় মান।  $\therefore 9 = 6\theta$ ,

$$\therefore \theta = \frac{3}{2} \text{ বা } \frac{3}{2} \text{ রেডিয়ান} = \frac{3}{2} \times \frac{180}{\pi} \text{ ডিগ্রী} = \frac{3 \times 180 \times 7}{2 \times 22} \text{ ডিগ্রী}$$

$$= 85\frac{1}{2} \text{ ডিগ্রী।}$$

দ্রষ্টব্য : \*চাপ  $= r\theta$ , এই সূত্রে  $\theta$  কোণটি সর্বত্র  $\theta$  রেডিয়ান বসিবে।]

উদা. 13. Find the length of an arc which subtends one minute at the centre of the earth, supposed to be a sphere of diameter 7920 miles. ( $\pi = \frac{22}{7}$ ). [C. U. '48]

চাপ  $= r\theta$ . এখানে  $r =$  ব্যাসার্ধ  $= \frac{7920}{2}$  মাইল।

$$\text{এবং } \theta = \text{কেন্দ্রস্থ কোণ} = 1' = \frac{1}{60} \text{ ডিগ্রী} = \frac{1}{60} \times \frac{\pi}{180} \text{ রেডিয়ান}$$

$$\text{চাপের দৈর্ঘ্য} = r\theta = \frac{7920}{2} \times \frac{1}{60} \times \frac{22}{7 \times 180} \text{ মাইল}$$

$$= \frac{11}{105} \text{ মাইল} = 1\frac{1}{105} \text{ মাইল।}$$

উদা. 14. An arc of 17 yds. 1 ft. 3 in. subtends at the centre of a circle an angle of  $1.9$  radians. Find the radius of the circle in inches. [C. U. '49]

চাপ  $= r\theta$ ; এখানে চাপ  $= 17$  গ. 1 ফু. 3 ই.  $= 627$  ই.

এবং  $\theta =$  কেন্দ্রস্থ কোণ  $= 1.9$  রেডিয়ান। অতএব,  $627$  ই.  $= r \times 1.9$ ,

$$\therefore r = \frac{627}{1.9} \text{ ই.} = \frac{6270}{19} \text{ ই.} = 330 \text{ ই.}, \therefore \text{নির্ণেয় ব্যাসার্ধ} = 330 \text{ ইঞ্চি।}$$

উদা. 15. If the diameter of the earth is 8000 miles, find the measure of a Nautical mile. [ $\pi = 3.1416$ ]

জানিবার যে চাপ পৃথিবীর কেন্দ্রে 1 মিনিট সন্মুখকোণ উৎপন্ন করে, তাহার দৈর্ঘ্যকে এক নৌ-মাইল (Nautical mile) বলে।

$$\text{চাপ} = r\theta; \text{ এখানে } r = \frac{8000}{2} \text{ মাইল} = 4000 \text{ মাইল}$$

$$\text{এবং } \theta = 1' = \frac{1}{60} \text{ ডিগ্রী} = \frac{\pi}{60 \times 180} \text{ রেডিয়ান}$$

$$\therefore \text{চাপ বা 1 নৌ-মাইল} = r\theta = 4000 \times \frac{\pi}{60 \times 180} \text{ মা.} = \frac{4000 \times 3.1416}{60 \times 180} \text{ মা.}$$

$$= \frac{10.472}{9} \text{ মা.} = 1.16 \text{ মাইল ( আসন্ন )।}$$

উদা. 16. A horse running along a circular track of radius 27 ft. passes over in 3 seconds an arc which subtends  $79^\circ$  at the centre. Find the distance the horse travels in half a minute. ( $\pi = \frac{22}{7}$ ). [C. U. '51]

$$\text{চাপ} = r\theta; \text{ এখানে } r = 27 \text{ ফুট, } \theta = 70^\circ = \frac{70 \times \pi}{180} \text{ রেডিয়ান}$$

$$= \frac{70}{180} \times \frac{22}{7} \text{ রেডি.} = \frac{11}{9} \text{ রেডিয়ান}$$

$$\therefore \text{চাপ} = r\theta = 27 \times \frac{11}{9} \text{ ফুট} = 33 \text{ ফুট।}$$

অতএব, ঘোড়াটি 3 সেকেন্ডে 33 ফুট যায়,

$\therefore$  ঘোড়াটি  $\frac{1}{2}$  মি. বা 30 সেকেন্ডে 330 ফুট যায়।

উদা. 17. A man running on a circular track at the rate of 10 miles an hour traverses an arc which subtends  $56^\circ$  at the centre in 36 seconds. Find the diameter of the circle. Given  $\pi = \frac{22}{7}$ . [C. U. '46]

1 ঘন্টায় বা 3600 সেকেন্ডে যায় 10 মা. বা 17600 গজ

$\therefore$  36 " " 176 গজ

$\therefore$  চাপটির দৈর্ঘ্য = 176 গজ।

$$\text{উহার সম্মুখ কেন্দ্রস্থ কোণ} = 56^\circ = \frac{\pi}{180} \times 56 = \frac{22 \times 56}{7 \times 180} \text{ রেডিয়ান}$$

$$= \frac{11}{15} \text{ রেডিয়ান}$$

$$\text{এক্ষে, } \therefore \text{চাপ} = r\theta, \therefore 176 = r \times \frac{44}{45}, \therefore r = \frac{176 \times 45}{44} = 180.$$

অতএব, নির্ণেয় ব্যাস =  $2r = 180 \text{ গজ} \times 2 = 360 \text{ গজ।}$

উদা. 18. If  $a_1, a_2, a_3$  be the circular measures of the angles subtended by the arcs of lengths  $l_1, l_2, l_3$  at the centres of circles whose radii are  $r_1, r_2, r_3$  respectively, show that the angle subtended at the centre by the arc of length  $l_1 + l_2 + l_3$  of a circle whose radius is  $\frac{1}{n}(a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3)$  will be  $n$  radians [C. U. '40]

$$\because \text{চাপ} = r\theta, \therefore l_1 = r_1 a_1, l_2 = r_2 a_2, l_3 = r_3 a_3.$$

$$\therefore l_1 + l_2 + l_3 = a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3.$$

এক্ষেণে  $l_1 + l_2 + l_3$  যদি চাপের দৈর্ঘ্য হয় এবং  $\frac{1}{n}(a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3)$  যদি ব্যাসার্ধ হয়, তবে ঐ চাপের সম্মুখস্থ কেন্দ্রস্থ কোণটির মান নির্ণয় করিতে হইবে।

$$\because r\theta = \text{চাপ}, \therefore \theta = \frac{\text{চাপ}}{\text{ব্যাসার্ধ}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{কোণটির নির্ণয় মান} &= \frac{l_1 + l_2 + l_3}{\frac{1}{n}(a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3)} = \frac{\text{রেডিয়ান}}{\frac{1}{n}(a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3)} \\ &= \frac{(a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3) \text{ রেডি.}}{\frac{1}{n}(a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3)} = \frac{1}{\frac{1}{n}} \text{ রেডি.} = n \text{ রেডিয়ান.} \end{aligned}$$

উদা. 19. If  $D$  and  $C$  be respectively the number of degrees and the number of radians in an angle, show that  $\frac{D}{180} = \frac{C}{\pi}$ . [C. U. '47, D. B. '50]

এখানে একই কোণের পরিমাণ  $D$  ডিগ্রী বা  $C$  রেডিয়ান বলা আছে।

$$\therefore D \text{ ডিগ্রী} = C \text{ রেডিয়ান.} \therefore D \text{ ডিগ্রী} = \frac{D}{90} \text{ সমকোণ এবং } C \text{ রেডিয়ান}$$

$$= \frac{2C}{\pi} \text{ সমকোণ,} \therefore \frac{D}{90} = \frac{2C}{\pi}, \therefore \frac{D}{180} = \frac{C}{\pi}.$$

উদা. 20. The number of degrees, gra<sup>l</sup>es and radians in an angle are respectively  $x, y$  and  $z$ . Show that  $\frac{x}{90} = \frac{y}{100} = \frac{z}{\pi}$ . [C. U. '41, '45; G. U. '51]

$$\therefore \text{একই কোণের পরিমাণ } x^\circ, y^\circ \text{ বা } z^\circ, \therefore x^\circ = y^\circ = z^\circ.$$

এক্ষেণে  $x^\circ = \frac{x}{90}$  সমকোণ  $y^\circ = \frac{y}{100}$  সমকোণ এবং  $z^\circ = \frac{2z}{\pi}$  সমকোণ,

$$\therefore \frac{x}{90} = \frac{y}{100} = \frac{2z}{\pi}.$$

উদা. 21. Find the area of a circle whose radius is 1 ft. ( $\pi = 3.1416$ ).

$$\text{বৃত্তের কালি} = \pi r^2 = 3.1416 \times (1)^2 \text{ বর্গফুট} = 3.1416 \times 01 \text{ বর্গফুট} \\ = 031416 \text{ বর্গফুট}.$$

উদা. 22. A mill sail, 28 ft. long, makes 10 revolutions per minute. What distance does its end traverse in an hour? ( $\pi = \frac{22}{7}$ ).

$$\text{এখানে ব্যাসার্ধ } r = 28 \text{ ফুট}। \quad \therefore \text{পরিধি} = 2\pi r = 2 \times \frac{22}{7} \times 28 \text{ ফুট} \\ = 176 \text{ ফুট}।$$

অতএব, পালটি একবার ঘুরিলে 176 ফুট গমন করে।

$\therefore$  এক মিনিটে উহা  $176 \times 10$  বা 1760 ফুট ঘোরে,

$$\therefore \text{এক ঘণ্টায় উহা } \frac{1760 \times 60}{3 \times 1760} \text{ মাইল বা } 20 \text{ মাইল ঘোরে}।$$

উদা. 23. The large hand of a clock is 2 ft. 4 inches long ; how many inches does its extremity move in 20 minutes ? [C. U. '48]

$$\text{ঘড়িটির পরিধি} = 2\pi r = 2 \times 3.1416 \times 2 \text{ ফু. 4ই.} = 2 \times 3.1416 \times 28 \text{ই.}।$$

ঘড়ির মিনিটের কাঁটা 60 মিনিটে সমস্ত পরিধি একবার ঘোরে,

$\therefore$  20 মিনিটে উহা পরিধির  $\frac{1}{3}$  অংশ ঘুরবে।

$$\therefore \text{নির্ণেয় দূরত্ব} = \frac{2 \times 3.1416 \times 28}{3} \text{ ইঞ্চি} = 58.6432 \text{ ইঞ্চি}।$$

উদা. 24. Find the times between 4 and 5 o'clock when the angle between the minute-hand and the hour-hand is

(i)  $72^\circ$  and (ii)  $\frac{8\pi}{15}$  radians.

ঘড়ির সমগ্র পরিধি কেন্দ্রে  $360^\circ$  কোণ উৎপন্ন করে। আবার, এই সমগ্র পরিধি 60 মিনিট ঘরের সমান।

(i) এক্ষেপে,  $360^\circ = 60$  মিনিট-ঘর পরিমাণ চাপের সম্মুখ কেন্দ্রস্থ কোণ,  
 $\therefore 72^\circ = 12$  মিনিট-ঘর " " " " " "

সুতরাং উভয় কাঁটার অন্তর 12 মিনিট-ঘর হইবে। 4টার সময় মিনিটের কাঁটা ঘণ্টার কাঁটার 20 মিনিট-ঘর পিছনে ছিল। অতএব যদি মিনিটের কাঁটা ঘণ্টার কাঁটা অপেক্ষা  $(20 - 12)$  বা 8 মিনিট-ঘর অথবা  $(0 + 12)$  বা 32 মিনিট-ঘর বেশী যায়, তবে উভয় কাঁটার মধ্যবর্তী কোণ  $72^\circ$  হইবে।

মিনিটের কাঁটা 55 মিনিট-ঘর বেশী যায় 60 মিনিটে

$\therefore$  " " 8 " " "  $\frac{60 \times 8}{55}$  বা  $\frac{96}{11}$  বা  $8\frac{8}{11}$  মিনিটে।

আবার, " 32 " " "  $\frac{60 \times 32}{55}$  বা  $34\frac{4}{11}$  মিনিটে

অতএব, 4টা  $8\frac{8}{11}$  মিনিটে এবং 4টা  $34\frac{4}{11}$  মিনিটে কাঁটা দুইটির মধ্যবর্তী কোণ  $72^\circ$  হইবে।

(ii)  $\frac{8\pi}{15}$  রেডিয়ান  $= \frac{8\pi}{15} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 96^\circ$ .

$360^\circ$  কোণ হইলে চাপের পরিমাণ 60 মিনিট-ঘর হয়,

$\therefore 96^\circ$  " " " "  $\frac{60}{360} \times 96$  বা 16 মিনিট-ঘর হয়

[বাকী অংশ পূর্বের মত কর] অন্তর = 4টা  $4\frac{4}{11}$  মিনিট বা 4টা  $39\frac{3}{11}$  মিনিট।

উদা. 25. If the radius (4000 miles) of the earth subtends an angle of  $8'6''$  at any point in the surface of the sun, what is the distance of the earth from the sun? [C. U.]

এখানে মনে কর, সূর্য-পৃষ্ঠের উপর S একটি বিন্দু, E বিন্দু পৃথিবীর কেন্দ্রে। ES সূর্য হইতে পৃথিবীর দূরত্ব। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ EP ঐ S বিন্দুতে যে ESP কোণ উৎপন্ন করিয়াছে তাহা  $8'6''$ .

এখন মনে কর, S-কে কেন্দ্র করিয়া SE ব্যাসার্ধ হইয়া একটি বৃত্ত আঁকা হইয়াছে। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ EP ঐ বৃত্তে যে চাপ ছেদ করিয়াছে তাহা মূলতঃ EP ব্যাসার্ধেরই সমান, কারণ এখানে  $\angle ESP$  অতিশয় ক্ষুদ্র এবং ES অতিশয় দীর্ঘ।



✓ 4. Express the following angles in centesimal system :—

(i)  $30^{\circ}12'36''$  (ii)  $63^{\circ}14'51''$  (iii)  $60^{\circ}6'45''$  (iv)  $\frac{3\pi^{\circ}}{5}$  (v)  $\frac{\pi^{\circ}}{12}$

✓ 5. Reduce the following angles to sexagesimal measure :

(i)  $40^{\circ}35'24''$  (ii)  $60^{\circ}25''$  (iii)  $40^{\circ}45'36''$  (iv)  $2^{\circ}$  (v)  $\frac{5}{8}\pi^{\circ}$  (vi)  $\frac{2\pi^{\circ}}{3}$

✗ 6. Express the following angles in radians :—

(i)  $30^{\circ}$  (ii)  $75^{\circ}30'$  (iii)  $45^{\circ}25'36''$  (iv)  $120^{\circ}$  (v)  $70^{\circ}40'$  (vi)  $325^{\circ}25'72''$

✓✓ 7. The sum of two angles is  $60$  grades and their difference is  $16^{\circ}$ ; find the angles in degrees and in grades.

✗ 8. The sum of two angles is  $140^{\circ}$  and their difference is  $90^{\circ}$ , find the angles in degrees and radians.

✗ 9. Two angles are in the ratio of  $5 : 3$  and their difference is (i)  $40^{\circ}$ , (ii)  $100^{\circ}$ , (iii)  $12\pi^{\circ}$ , find the angles.

✓✓ 10. Two angles of a triangle are  $48^{\circ}47'28''$  and  $71^{\circ}12'32''$ . Find the third angle in centesimal measure.

✓✗ 11. The sum of two angles is  $152^{\circ}$ . If the number of degrees in one is equal to the number of grades in the other, find the circular measure of the angles.

✓ 12. Divide a right angle into two parts such that the number of degrees in the one and that of grades in the other may be in the ratio of  $3 : 10$ .

✗ 13. The angles of a triangle are in the ratio of  $4 : 3 : 5$ , find the circular measure of the least angle.

✓ 14. One angle of a triangle is  $\frac{3\pi^{\circ}}{10}$  and another is  $70^{\circ}$

Express the third angle in degrees. [C. U.]

✗ 15. Divide  $88^{\circ}16'$  into two parts such that the number of sexagesimal seconds in one part may be the same as the number of centesimal seconds in the other.

16. The four angles of a quadrilateral are in A. P. ; the greatest angle is twice the least angle. Find the circular measure of the least angle. [B. U. 1897]
- ✓ 17. The angle of a quadrilateral are  $x^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $60^\circ$  and  $\frac{5}{6}\pi^\circ$  ; find  $x$ . [B. U.]
- ✓ 18. Find the circular measure of an interior angle of a regular  $n$ -gon. [C. U.]
- ✓ 19. The difference of two angles is  $1^\circ$  and the sum of their circular measure is 1. Find the angles in degrees. [M. U.]
20. Show that the number of degrees in an angle of a regular dodecagon is equal to the number of grades in an angle of a regular octagon. [M. U.]
21. The angles of a pentagon are in A. P. and its greatest angle is thrice the least. Find the angles in degrees and radians. [B. U.]
- ✓ 22. The circumference of a circle is 176 yds. , find its radius. ( $\pi = \frac{22}{7}$ ).
- ✓ 23. The radius of a circle is 7", find the angle subtended at the centre by an arc 11" in length.
24. Find the length of an arc which subtends  $22\frac{1}{2}^\circ$  at the centre, the radius being 17'6". ( $\pi = \frac{22}{7}$ ).
25. Find the circumference of a coin whose diameter is one inch. ( $\pi = \frac{22}{7}$ ).
- ✓ 26. An arc of a circle measuring 2618 ft., subtends an angle of  $60^\circ$  at the centre. Find the radius of the circle. ( $\pi = 3.1416$ ). [C. U.]
27. If an arc of 5 yds. 1 ft. 6 in. subtends an angle of  $1.8^\circ$  at the centre, find the radius of the circle in inches.
- ✓ 28. Assuming the distance of the sun from the earth to be 92,000,000 miles and the angles subtended by the diameter of the sun at the earth to be  $32'$ , find the diameter of the sun. ( $\pi = \frac{22}{7}$ ).



/ X 29. An arc of a circle, whose radius is 48 ft., subtends an angle  $66^{\circ}15'$  at the centre. Find the length of the arc.

(Given circumference : diameter :: 333 : 106). [C. U.]

X 30. An arc of a circle, whose radius is 4000 miles, subtends at its centre an angle of  $5''$ . Find the length of the arc in miles. [C. U. 1877]

31. Assuming the radius of the earth to be 4000 miles, find the difference in latitude of two places, one of which is 100 miles north of the other. ( $\pi = 3.14159\dots$ ).

32. Find, correct to a foot, the length of an arc of the Earth's equator, which subtends an angle of 1 minute at the centre of the Earth, supposing the radius of the Earth's equator to be 4000 miles and  $\pi = 3.14159$ . [G. U. '50]

33. If the circumference of a circle be divided into five parts which are in A. P. and if the greatest part be six times the least, find in radians the angles subtended by the parts at the centre. [B. U.]

34. Calculate, correct to 3 places of decimals, the area of a circle of radius 6.28 ft. ( $\pi = 3.14159$ ). [E. B. S. B. '49]

35. A horse running along a circular path at the rate of 5 miles an hour traverses an arc which subtends  $63^{\circ}$  at the centre in 0 seconds. Find the diameter of the circle. ( $\pi = \frac{22}{7}$ ).

Q. 36. The minute-hand of a clock is 2 ft. 6 in. long, how many inches does its extremity move in 30 minutes ? ( $\pi = 3.1416$ ).

37. Find the times between 5 and 6 o'clock when the angle between the two hands of a clock is  $84^{\circ}$ .

38. A regular polygon has three times as many sides as another and the number of degrees in each interior angle of the first is the same as the number of grades in that of the second. Find the number of sides of each polygon.

39. The angles of a triangle are in A. P. and the greatest is double the least ; express the angles in radians. [C.U. '51]

40. Show that the number of degrees in an angle of a regular decagon is to the number of grades in an angle of a regular pentagon as 6 : 5. [C. U. '50]

41. Find the time between 1 P. M. and 2 P. M. when the angle between the hands of a clock is  $186\frac{2}{3}$  grades. [C.U. '51]

42. A man  $5\frac{1}{2}$  ft. high is seen from the distance of half a mile ; what is the angle that he subtends ? [W.B.S.F. '52]

43. Find the ratio of the radii of two circles at the centres of which two arcs of the same length subtend angles of  $60^\circ$  and  $75^\circ$ . [W.B.S.F. '53]

[ Hints.  $\because 180 = \pi^\circ$   $60^\circ = \frac{\pi}{3}$  এবং  $75^\circ = \frac{5\pi}{12}$  . যদি বৃত্তদ্বয়ের

ব্যাসার্ধ যথাক্রমে  $r$  ও  $R$  হয়, তবে প্রথম বৃত্তের চাপ  $= \frac{\pi}{3} \cdot r$  এবং দ্বিতীয়

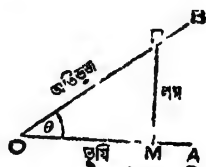
বৃত্তের চাপ  $= \frac{5\pi}{12} \cdot R$ . আবার,  $\therefore$  চাপদ্বয় সমান ( স্বীকার ),

$$\therefore \frac{\pi}{3} \cdot r = \frac{5\pi}{12} \cdot R, \therefore r : R = \frac{5\pi}{12} : \frac{\pi}{3} = 5 : 4. ]$$

44. Express in circular measure an angle of a regular polygon of 10 sides. [U.U. '50]

## কোণানুপাত ( Trigonometrical Ratios )

78. সংজ্ঞা : মনে কর, AOB এই কোণটির পরিমাপ  $\theta$  ( ডিগ্রী ) । OB বাহুর যে কোন বিন্দু P হইতে OAর উপর PM লম্ব টানা হইয়াছে। এখন POM সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণ  $\theta$ -র সম্পর্কে PMকে ইহার লম্ব, OMকে ভূমি এবং OPকে অতিভুজ বলে। আবার, P সূক্ষ্মকোণের সম্পর্কে OMকে ইহার লম্ব, PMকে ভূমি এবং OPকে অতিভুজ বলিতে হইবে। এখন  $\angle POM$  বা  $\theta$  কোণের কোণানুপাতগুলি পরপৃষ্ঠায় লিখিত রূপে হইবে :—



এং চিত্র

$$\frac{PM}{OP} \left( \frac{\text{অর্থঃ লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} \right) = \theta \text{ কোণের সাইন (Sine)}$$

$$\frac{OM}{OP} \left( \frac{\text{অর্থঃ ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} \right) = \text{কোসাইন (Cosine)}$$

$$\frac{PM}{OM} \left( \frac{\text{অর্থঃ লম্ব}}{\text{ভূমি}} \right) = \text{ট্যানজেন্ট (Tangent)}$$

$$\frac{OM}{PM} \left( \frac{\text{অর্থঃ ভূমি}}{\text{লম্ব}} \right) = \text{কোট্যানজেন্ট (Cotangent)}$$

$$\frac{OP}{PM} \left( \frac{\text{অর্থঃ অতিভুজ}}{\text{লম্ব}} \right) = \text{কোসেকান্ট (Cosecant)}$$

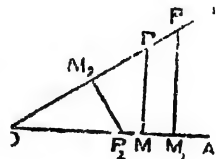
$$\frac{OP}{OM} \left( \frac{\text{অর্থঃ অতিভুজ}}{\text{ভূমি}} \right) = \text{সেকান্ট (Secant)}$$

সংক্ষেপে এই অনুপাতগুলিকে সাইন  $\theta$  ( $\sin \theta$ ), কস  $\theta$  ( $\cos \theta$ ), ট্যান  $\theta$  ( $\tan \theta$ ), কট  $\theta$  ( $\cot \theta$ ), কোসেক  $\theta$  ( $\operatorname{cosec} \theta$ ) এবং সেক  $\theta$  ( $\sec \theta$ ) লেখা হয়।

এইগুলি ব্যতীত  $1 - \cos \theta$  কে ভার্স  $\theta$  ( $\operatorname{vers} \theta$ ) এবং  $1 - \sin \theta$  কে কোভার্স  $\theta$  ( $\operatorname{co-vers} \theta$ ) বলে।

79. Prove that the trigonometrical ratios are always the same for the same angle.

O-কোণের OB বাহুর উপর অপর যে কোন বিন্দু  $P_1$  হইতে OA বাহুর উপর  $P_1M_1$  লম্ব টানা হইল। এখানে দেখান হইবে যে  $\triangle POM$  হইতে O-কোণের যে কোণানুপাতগুলি পাওয়া গিয়াছিল  $\triangle P_1OM_1$  হইতেও তাহাই পাওয়া যায়।  $POM$  ও  $P_1OM_1$  এই ত্রিভুজদ্বয়ে  $\angle O$  সাধারণ কোণ,  $\angle M = \angle M_1$  (সমকোণ বলিয়া), সুতরাং অবশিষ্ট  $\angle P = \angle P_1$ । অতএব ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী।



৬নং চিত্র

$$\frac{PM}{OP} = \frac{P_1M_1}{OP_1}, \quad \frac{OM}{OP} = \frac{OM_1}{OP_1}, \quad \frac{PM}{OM} = \frac{P_1M_1}{OM_1} \dots \dots \text{ইত্যাদি}$$

অতএব, প্রমাণিত হইল যে,  $OB$ র উপর  $P$  বিন্দুর যে কোণ অবস্থিতিতে  $O$ -কোণের কোণানুপাতগুলি সমান হইবে।

এইরূপে যদি  $OA$  রেখার উপরিস্থ কোন বিন্দু  $P_2$  হইতে  $OB$ র উপর  $P_2M_2$  লম্ব টানা হয়, তাহা হইলে  $\triangle OP_2M_2$  হইতে  $O$ -কোণের যে কোণানুপাতগুলি পাওয়া যায় সেগুলিও পূর্ব কোণানুপাতগুলির সমান। কারণ,  $\triangle POM$  এবং  $\triangle P_2OM_2$  সদৃশকোণী বলিয়া উহাদের অনুরূপ বাহুগুলিও সমানুপাতী।

### 80. কোণানুপাতগুলির পরস্পর সম্বন্ধ

লক্ষ্য কর যে, সাইনের  $\left(\frac{PM}{OP}\right)$  বিপরীত কোসেক  $\left(\frac{OP}{PM}\right)$ , কসের  $\left(\frac{OM}{OP}\right)$  বিপরীত সেক  $\left(\frac{OP}{OM}\right)$  এবং ট্যানের  $\left(\frac{PM}{OM}\right)$  বিপরীত কট  $\left(\frac{OM}{PM}\right)$ ।

অতএব, এইগুলি ভালরূপে মনে রাখিবে :—

$$(i) \sin \theta = \frac{1}{\csc \theta} \text{ এবং } \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}, \therefore \sin \theta \times \csc \theta = 1$$

$$(ii) \cos \theta = \frac{1}{\sec \theta} \text{ এবং } \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}, \therefore \cos \theta \times \sec \theta = 1$$

$$(iii) \tan \theta = \frac{1}{\cot \theta} \text{ এবং } \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}, \therefore \tan \theta \times \cot \theta = 1$$

$$(iv) \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{ এবং } \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

[ জ্ঞেয়্য : (i)  $\sin \theta, \cos \theta$  প্রভৃতি দ্বারা অনুপাত বুঝায় বলিয়া ইহারা এক একটি সংখ্যা। অতএব, যোগ বিয়োগ গুণ ভাগের নিয়ম ইহাদের প্রতি প্রযুক্ত হইবে। (ii)  $\sin \theta$ র দ্বারা একটি সংখ্যা বুঝায় ইহার অর্থ  $\sin \times \theta$  হইবে না। (iii)  $a$  ও  $b$  এই সংখ্যাভয়ের যোগ বিয়োগ প্রভৃতি যেরূপ হয়, সেইরূপ  $\sin \theta$  ও  $\cos \theta$ -এর যোগফল  $\sin \theta + \cos \theta$ , উহাদের অন্তর  $\sin \theta - \cos \theta$  উহার গুণফল  $\sin \theta \cos \theta$  এবং ভাগফল  $\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$  হয়।

অতএব,  $\sin \theta \times \sin \theta = (\sin \theta)^2 = \sin^2 \theta$  এবং  $\sin \theta \times 2 = 2 \sin \theta$ .

(iv) আরও দেখ  $(\sin \theta)^2$  এর পরিবর্তে  $\sin^2 \theta$  এইভাবে লিখিতে হয়। কিন্তু  $\sin^2 \theta$  লিখিলে অন্য অর্থ বুঝাইবে। আবার,  $2 \sin \theta$  এবং  $\sin 2\theta$  এক নহে। প্রথমটির অর্থ  $\sin \theta$ -র দ্বিগুণ এবং দ্বিতীয়টির অর্থ  $\theta$ র দ্বিগুণ কোণের sine ]।

### ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সম্বন্ধীয় অভেদাবলী

81. নিম্নের প্রয়োজনীয় সূত্রগুলি ( বা অভেদগুলি ) বিশেষভাবে স্মরণ রাখিতে হইবে। যথা—(i)  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$  (ii)  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  (iii)  $\sec^2 \theta - 1 = \tan^2 \theta$  (iv)  $\operatorname{cosec}^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta$ . উহাদের প্রমাণ নিম্নে দেখ—

(i) প্রমাণ : [ নং চিত্রটি এখানে আঁক ]

∵  $PM \perp OM$ , ∴  $\sin \theta = \frac{PM}{OP}$ ,  $\cos \theta = \frac{OM}{OP}$  এবং  $\tan \theta = \frac{PM}{OM}$ .

এক্ষণে,  $\tan \theta = \frac{PM}{OM} = \frac{\frac{PM}{OP}}{\frac{OM}{OP}}$  ( লব ও হরকে  $OP$  দ্বারা ভাগ করিয়া )

$$= \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

(ii) Prove that  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ . [E.B.S.B. '30]

[ নং চিত্র আঁক ] চিত্রে  $\angle M$  সমকোণ বলিয়া  $PM^2 + OM^2 = OP^2$ ,

∴  $\frac{PM^2}{OP^2} + \frac{OM^2}{OP^2} = \frac{OP^2}{OP^2}$  ( উভয় পক্ষকে  $OP^2$  দ্বারা ভাগ করিয়া )

বা,  $\left(\frac{PM}{OP}\right)^2 + \left(\frac{OM}{OP}\right)^2 = 1$ ; কিন্তু  $\sin \theta = \frac{PM}{OP}$  এবং  $\cos \theta = \frac{OM}{OP}$ ,

∴  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ .

(iii) Prove that  $\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$ . [C.U. '49; E.B.S.B.]

নং চিত্রে  $\angle M$  সমকোণ বলিয়া  $\sec \theta = \frac{OP}{OM}$ ,  $\tan \theta = \frac{PM}{OM}$ ,

এবং  $OP^2 = PM^2 + OM^2$ .

$\therefore \frac{OP^2}{OM^2} = \frac{PM^2}{OM^2} + \frac{OM^2}{OM^2}$ , বা  $\left(\frac{OP}{OM}\right)^2 = \left(\frac{PM}{OM}\right)^2 + 1$

$\therefore \sec^2 \theta = \tan^2 \theta + 1$ .

(vi) নং চিত্রে  $OP^2 = PM^2 + OM^2$ ,

এবং  $\operatorname{cosec} \theta = \frac{OP}{PM}$ ,  $\cot \theta = \frac{OM}{PM}$ .

এক্ষণে,  $\therefore OP^2 = PM^2 + OM^2$ ,  $\therefore \frac{OP^2}{PM^2} = \frac{PM^2}{PM^2} + \frac{OM^2}{PM^2}$ ,

বা,  $\left(\frac{OP}{PM}\right)^2 = 1 + \left(\frac{OM}{PM}\right)^2$ ,  $\therefore \operatorname{cosec}^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta$ .

## 82. বিবিধ অভেদের সমাধান

উদা. 1. Prove that  $\sin^4 \theta - \cos^4 \theta + 1 = 2 \sin^2 \theta$ .

$$\begin{aligned} \sin^4 \theta - \cos^4 \theta + 1 &= (\sin^2 \theta)^2 - (\cos^2 \theta)^2 + 1 \\ &= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) + 1 \\ &= 1 \times (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \quad [\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1] \\ &= \sin^2 \theta - \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

উদা. 2. Prove that  $\cos A + \tan A \sin A = \sec A$ . [C U. '50]

$$\begin{aligned} \text{বামপক্ষ} &= \cos A + \frac{\sin A}{\cos A} \times \sin A = \cos A + \frac{\sin^2 A}{\cos A} = \frac{\cos^2 A + \sin^2 A}{\cos A} \\ &= \frac{1}{\cos A} = \sec A. \end{aligned}$$

উদা. 3. Prove that  $\frac{1}{\cot A + \tan A} = \sin A \cos A$ . [C. U. '46]

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{1}{\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\sin A}{\cos A}} = \frac{1}{\frac{\cos^2 A + \sin^2 A}{\sin A \cos A}} = \frac{1}{\frac{1}{\sin A \cos A}} = \sin A \cos A.$$

উদা. 4. Prove that  $\sqrt{\frac{1-\sin \theta}{1+\sin \theta}} = \sec \theta - \tan \theta$ .

$$\begin{aligned}\text{বামপক্ষ} &= \sqrt{\frac{(1-\sin \theta)(1-\sin \theta)}{(1+\sin \theta)(1-\sin \theta)}} = \sqrt{\frac{(1-\sin \theta)^2}{1-\sin^2 \theta}} \\ &= \sqrt{\frac{(1-\sin \theta)^2}{\cos^2 \theta}} = \frac{1-\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ &= \sec \theta - \tan \theta.\end{aligned}$$

উদা. 5. Show that  $\sec^2 A \operatorname{cosec}^2 A = \tan^2 A + \cot^2 A + 2$ .

[C. U. '40]

$$\begin{aligned}\text{বামপক্ষ} &= (1+\tan^2 A)(1+\cot^2 A) \\ &= 1+\tan^2 A+\cot^2 A+\tan^2 A \cot^2 A \\ &= 1+\tan^2 A+\cot^2 A+\tan^2 A \times \frac{1}{\tan^2 A} \\ &= 1+\tan^2 A+\cot^2 A+1=\tan^2 A+\cot^2 A+2.\end{aligned}$$

উদা. 6. Show that  $1+\frac{\cot^2 A}{1+\operatorname{cosec} A} = \operatorname{cosec} A$ . [C. U. '47]

$$\begin{aligned}\text{বামপক্ষ} &= 1+\frac{\operatorname{cosec}^2 A-1}{1+\operatorname{cosec} A} = 1+\frac{(\operatorname{cosec} A+1)(\operatorname{cosec} A-1)}{\operatorname{cosec} A+1} \\ &= 1+\operatorname{cosec} A-1=\operatorname{cosec} A.\end{aligned}$$

উদা. 7. Show that  $(\sec \theta - \cos \theta)(\operatorname{cosec} \theta - \sin \theta)(\tan \theta + \cot \theta) = 1$ . [C. U. '51]

$$\begin{aligned}\text{বামপক্ষ} &= \left(\frac{1}{\cos \theta} - \cos \theta\right)\left(\frac{1}{\sin \theta} - \sin \theta\right)\left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right) \\ &= \frac{1-\cos^2 \theta}{\cos \theta} \times \frac{1-\sin^2 \theta}{\sin \theta} \times \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos \theta \sin \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \times \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \times \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} = 1.\end{aligned}$$

উদা. 8. Prove that  $\frac{1}{\sec \theta + \tan \theta} - \frac{1}{\cos \theta}$

$$= \frac{1}{\cos \theta} - \frac{1}{\sec \theta - \tan \theta}. \quad [\text{C. U. '44 ; G. U. '51}]$$

$$\frac{1}{\sec \theta + \tan \theta} + \frac{1}{\sec \theta - \tan \theta} = \frac{\sec \theta - \tan \theta + \sec \theta + \tan \theta}{\sec^2 \theta - \tan^2 \theta}$$

$$= \frac{2 \sec \theta}{1} = 2 \sec \theta = \frac{2}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos \theta}.$$

এক্ষণে, পক্ষান্তর করিয়া পাই .

$$\frac{1}{\sec \theta + \tan \theta} - \frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta} - \frac{1}{\sec \theta - \tan \theta}.$$

উদা. 9. Prove that  $\cos^2 A - \sin^2 A = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$ . [G.U. '50]

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\cos^2 A + \sin^2 A} \quad (\because \cos^2 A + \sin^2 A = 1)$$

$$\frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\cos^2 A + \sin^2 A} \quad \left[ \begin{array}{l} \text{লব ও হরকে } \cos^2 A \text{ দ্বারা ভাগ করা হইল,} \\ \text{ইহাতে মানের কোন পরিবর্তন হইবে না।} \end{array} \right]$$

$$= \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}.$$

উদা. 10 Show that  $\frac{\tan \theta + \sec \theta - 1}{\tan \theta - \sec \theta + 1} = \frac{\sin \theta + 1}{\cos \theta}.$

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{(\tan \theta + \sec \theta) + (\tan^2 \theta - \sec^2 \theta)}{\tan \theta - \sec \theta + 1}$$

$$[ \because \sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta, \therefore -1 = \tan^2 \theta - \sec^2 \theta ]$$

$$= \frac{(\tan \theta + \sec \theta)(1 + \tan \theta - \sec \theta)}{(\tan \theta - \sec \theta + 1)} = \tan \theta + \sec \theta$$

$$= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta + 1}{\cos \theta}.$$

উদা. 11. If  $\sin A + \sin^2 A = 1$ , prove that  $\cos^2 A + \cos^4 A = 1$ .  
[E. B. S. B. '51]

$$\therefore \text{এখানে } \sin A + \sin^2 A = 1, \therefore \sin A = 1 - \sin^2 A = \cos^2 A,$$

$$\therefore \sin^2 A = \cos^4 A. \text{ এক্ষণে, } \cos^2 A + \cos^4 A = \cos^2 A + \sin^2 A = 1.$$



উদা. 12. If  $\cos A + \sin A = \sqrt{2} \cos A$ , prove that

$$\cos A - \sin A = \sqrt{2} \sin A.$$

$$\therefore \cos A + \sin A = \sqrt{2} \cos A \dots (1),$$

$$\therefore \cos^2 A + \sin^2 A + 2 \cos A \times \sin A = 2 \cos^2 A \text{ (বর্গ করিয়া)}$$

$$\text{বা, } \cos^2 A - \sin^2 A = 2 \cos A \sin A \dots (2) \text{ [পক্ষান্তর করিয়া]}$$

$$\text{এখন (2) } \div \text{ (1) করিয়া } \cos A - \sin A = \frac{2 \cos A \sin A}{\sqrt{2} \cos A} = \sqrt{2} \sin A.$$

উদা. 13. Simplify  $\cos^2 A \cos^2 B + \sin^2 A \sin^2 B$

$$+ \cos^2 A \sin^2 B + \cos^2 B \sin^2 A. \quad [C. U. '43]$$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = (\cos^2 A \cos^2 B + \cos^2 A \sin^2 B) +$$

$$(\sin^2 A \sin^2 B + \cos^2 B \sin^2 A)$$

$$= \cos^2 A (\cos^2 B + \sin^2 B) + \sin^2 A (\sin^2 B + \cos^2 B)$$

$$= (\cos^2 B + \sin^2 B)(\cos^2 A + \sin^2 A) = 1 \times 1 = 1.$$

উদা. 14. Simplify  $\frac{(\sin A + \cos A)(1 - \sin A \cos A)}{\sin^3 A + \cos^3 A}$ .

$$\text{প্রদত্ত ভগ্নাংশ} = \frac{(\sin A + \cos A)(\sin^2 A + \cos^2 A - \sin A \cos A)}{\sin^3 A + \cos^3 A}$$

$$= \frac{\sin^3 A + \cos^3 A}{\sin^3 A + \cos^3 A} = 1.$$

উদা. 15. Simplify  $\cos^2 B \operatorname{cosec}^2 A - \sin^2 B \cot^2 A$

$$- \cos^2 B \cot^2 A + \sin^2 B \operatorname{cosec}^2 A. \quad [C. U. '45]$$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \cos^2 B (\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A) + \sin^2 B (\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A)$$

$$= (\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A)(\cos^2 B + \sin^2 B) = 1 \times 1 = 1.$$

উদা. 16. Simplify  $\frac{\sec^4 A - 2 \sec^2 A \tan^2 A + \tan^4 A - 1}{\operatorname{cosec}^4 A - 2 \operatorname{cosec}^2 A \cot^2 A + \cot^4 A}.$

$$[C. U. '41]$$

$$\text{প্রদত্ত ভগ্নাংশ} = \frac{(\sec^2 A - \tan^2 A)^2 - 1}{(\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A)^2} = \frac{(1)^2 - 1}{(1)^2} = \frac{1-1}{1} = 0.$$

উদা. 17. Simplify  $\frac{1}{1+\sin^2 A} + \frac{1}{1+\operatorname{cosec}^2 A}$ .

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= \frac{1}{1+\sin^2 A} + \frac{1}{1+\frac{1}{\sin^2 A}} = \frac{1}{1+\sin^2 A} + \frac{1}{\frac{\sin^2 A + 1}{\sin^2 A}} \\ &= \frac{1}{1+\sin^2 A} + \frac{\sin^2 A}{1+\sin^2 A} = \frac{1+\sin^2 A}{1+\sin^2 A} = 1.\end{aligned}$$

উদা. 18. Simplify  $\frac{\sin A - \sin B}{\cos A + \cos B} + \frac{\cos A - \cos B}{\sin A + \sin B}$ .

[C. U. '42, '44]

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= \frac{\sin^2 A - \sin^2 B + \cos^2 A - \cos^2 B}{(\cos A + \cos B)(\sin A + \sin B)} \\ &= \frac{(\sin^2 A + \cos^2 A) - (\sin^2 B + \cos^2 B)}{(\cos A + \cos B)(\sin A + \sin B)} \\ &= \frac{1-1}{(\cos A + \cos B)(\sin A + \sin B)} = 0.\end{aligned}$$

উদা. 19. If  $x \sin^3 \alpha + y \cos^3 \alpha = \sin \alpha \cos \alpha$ , and  $x \sin \alpha - y \cos \alpha = 0$ , then  $x^2 + y^2 = 1$ . [C. U. '37 ; P. U. '43]

$$\therefore x \sin \alpha - y \cos \alpha = 0, \quad \therefore x \sin \alpha = y \cos \alpha.$$

$$\therefore \frac{x}{\cos \alpha} = \frac{y}{\sin \alpha} = k \text{ (মনে কর)}, \quad \therefore x = k \cos \alpha, y = k \sin \alpha.$$

একগে  $\therefore x \sin^3 \alpha + y \cos^3 \alpha = \sin \alpha \cos \alpha$ ,

$$\therefore k \cos \alpha \sin^3 \alpha + k \sin \alpha \cos^3 \alpha = \sin \alpha \cos \alpha.$$

$$\text{বা, } k \sin \alpha \cos \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha.$$

$$\text{বা, } k \sin \alpha \cos \alpha = \sin \alpha \cos \alpha \quad [\because \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1]$$

$$\therefore k = 1, \quad \therefore x = \cos \alpha \text{ এবং } y = \sin \alpha,$$

$$\therefore x^2 + y^2 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

### Exercise 2

Prove the following :-

1.  $\cos^4 \theta - \sin^4 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1$ .

2.  $\frac{1}{\sin A \cos A} = \tan A + \cot A$ .

[E. B. S. B. '48]

3.  $\cos^6 A + \sin^6 A + 3 \sin^2 A \cos^2 A = 1.$
- ✓ 4.  $\sqrt{\frac{1+\cos \theta}{1-\cos \theta}} = \operatorname{cosec} \theta + \cot \theta. \quad [\text{C. U. '43}]$
5.  $\tan^2 A \cot A + \cot^2 A \tan A = \sec A \operatorname{cosec} A.$
6.  $(\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 - 2 \sin \theta \cos \theta. \quad [\text{E. B. S. B. '50}]$
7.  $\sec^4 \theta - \sec^2 \theta = \tan^4 \theta + \tan^2 \theta.$
8.  $\sec^4 A - 2 \tan^2 A = 1 + \tan^4 A.$
- ✓ 9.  $\sec^4 \theta - \cot^4 \theta - 1 = 2 \cot^2 \theta.$
- ✓ 10.  $\sin^2 \theta (1 + \cot^2 \theta) + \cos^2 \theta (1 + \tan^2 \theta) = 2 \quad [\text{C. U. '51}]$
- ✓ 11.  $\sec^2 A \operatorname{cosec}^2 A = \tan^2 A + \cot^2 A + 2. \quad [\text{C. U. '40}]$
- ✓ 12.  $\sqrt{\frac{\sec \theta + 1}{\sec \theta - 1}} = \cot \theta + \operatorname{cosec} \theta.$
13.  $4 \tan^2 A + 3 = 3 \sec^2 A + \tan^2 A.$  14.  $1 + \frac{\cos A}{\sec A} + \frac{\sin A}{\operatorname{cosec} A} = 2.$
14. (a)  $\frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta. \quad [\text{G. U. '52}]$
- ✓ 15.  $\operatorname{cosec}^2 A \cos^2 B - \cot^2 A \sin^2 B + \operatorname{cosec}^2 A \sin^2 B - \cot^2 A \cos^2 B = 1.$
- ✓ 16.  $\sqrt{\sec^2 A - 1} = \sin A \sec A.$  17.  $\frac{\tan \theta + \cot A}{\cot \theta + \tan A} = \cot A \tan \theta.$
18.  $\frac{\sec^4 \theta - 2 \sec^2 \theta \tan^2 \theta + \tan^4 \theta}{\operatorname{cosec}^4 \theta - 2 \operatorname{cosec}^2 \theta \cot^2 \theta + \cot^4 \theta} = 1. \quad [\text{C. U. '42}]$
- ✓ 19.  $\sqrt{\frac{1 - \sin A}{1 + \sin A}} = \sec A - \tan A.$
- ✓ 20.  $(\tan A + \sec A)^2 = \frac{1 + \sin A}{1 - \sin A}. \quad [\text{C. U. '34}]$
21.  $\frac{1}{\operatorname{cosec} A + \cot A} + \frac{1}{\operatorname{cosec} A - \cot A} = 2 \operatorname{cosec} A.$
- ✓ 22.  $\frac{1}{\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta} - \frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta} - \frac{1}{\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta}.$

$$23. (1 + \tan^2 A)(1 - \sin^2 A) = 1. \quad [C. U.]$$

$$24. (1 + \tan \theta - \sec \theta)(1 + \cot \theta + \operatorname{cosec} \theta) = 2.$$

$$25. \frac{1}{1 + \cos^2 A} + \frac{1}{1 + \sec^2 A} = 1.$$

$$26. \frac{\cot A + 1}{\cot A - 1} = \frac{1 + \tan A}{1 - \tan A}, \quad \therefore 27. 1 + \frac{\tan^2 \theta}{1 + \sec \theta} = \sec \theta.$$

$$28. \frac{\cos A + \cos B}{\sin A + \sin B} = \frac{\sin A - \sin B}{\cos B - \cos A}.$$

$$29. \frac{\cos A}{1 + \sin A} + \frac{1 + \sin A}{\cos A} = 2 \sec A.$$

$$30. \frac{\cot \theta + \operatorname{cosec} \theta - 1}{\cot \theta - \operatorname{cosec} \theta + 1} = \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}.$$

$$31. 2(\sin^6 \theta + \cos^6 \theta) - 3(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) + 1 = 0.$$

$$32. \frac{\operatorname{cosec} A}{\operatorname{cosec} A - 1} + \frac{\operatorname{cosec} A}{\operatorname{cosec} A + 1} = 2 \sec^2 A. \quad [W.B.S.F. '53]$$

Simplify :—

$$33. \frac{\sin A}{\operatorname{cosec} A} + \frac{\cos A}{\sec A} + 1. \quad 34. \frac{1 - \tan \theta}{\cot \theta - 1} - \frac{1 + \tan \theta}{\cot \theta + 1}.$$

$$35. \frac{\sec^4 A - 2 \sec^2 A \tan^2 A + \tan^4 A}{\sin^4 \theta + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \cos^4 \theta}. \quad [G. U. '49]$$

$$36. \frac{1}{\operatorname{cosec} A - \cot A} + \frac{1}{\operatorname{cosec} A + \cot A} - \frac{2}{\sin A}.$$

$$37. \frac{\sin A + \sin B}{\cos A - \cos B} + \frac{\cos A + \cos B}{\sin A - \sin B}.$$

$$38. \frac{\sec A - \sec B}{\tan B + \tan A} + \frac{\tan B - \tan A}{\sec A + \sec B}.$$

$$39. \text{ If } 7 \sin^2 \theta + 3 \cos^2 \theta = 4, \text{ show that } \tan \theta = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

[C. U. '38]

$$40. \text{ Prove that } \sin \theta (1 + \tan \theta) + \cos \theta (1 + \cot \theta) = \sec \theta + \operatorname{cosec} \theta. \quad [C. U. '35]$$

41. If  $\cos \theta - \sin \theta = \sqrt{2} \sin \theta$ , then  $\cos \theta + \sin \theta = \sqrt{2} \cos \theta$ . [ B. H. U. '46 ]

৪৩. কোণাঙ্গপাতগুলিকে উহাদের কোন একটি অঙ্গপাত দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

(1) Express all the trigonometrical ratios in terms of the sine.

[ প্রথম প্রণালী ]  $\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \therefore \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta,$   
 $\therefore \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta};$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}, \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}{\sin \theta}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}; \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}.$$

[ অন্ম প্রণালী ] (নং চিত্রে) মনে কর,  $\angle AOP = \theta$ ,  $OP = 1$  (একক) এবং  $PM = a$  একক।

$$\therefore \sin \theta = \frac{PM}{OP} = \frac{a}{1} = a.$$

$$\because OP^2 = PM^2 + OM^2, \therefore OM^2 = OP^2 - PM^2, \therefore OM = \sqrt{1 - a^2}$$

$$\text{এক্ষে, } \cos \theta = \frac{OM}{OP} = \frac{\sqrt{1 - a^2}}{1} = \sqrt{1 - \sin^2 \theta},$$

$$\tan \theta = \frac{PM}{OM} = \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}, \text{ ইত্যাদি।}$$

[ দ্রষ্টব্য : যে অঙ্গপাতে 'প্রকাশ' করিতে হইবে তাহার মান যেন  $a$  দৈর্ঘ্য একক হয় এরূপভাবে ত্রিভুজের বাহুগুলির মান ধরিবে। ]

(2) Express all trigonometrical ratios in terms of the tangent.

(নং চিত্রে) মনে কর,  $PM = a$  এবং  $OM = 1$ , সুতরাং  $\tan \theta = \frac{PM}{OM} = a.$

$$\therefore OP^2 = OM^2 + PM^2, \therefore OP = \sqrt{OM^2 + PM^2} = \sqrt{1 + a^2}.$$

$$\text{এক্ষে, } \sin \theta = \frac{PM}{OP} = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}} = \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}},$$

$$\cos \theta = \frac{OM}{OP} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}; \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta};$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \sqrt{1 + \tan^2 \theta}; \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}{\tan \theta}.$$

84. কোন প্রদত্ত কোণাভূপাত হইতে অন্য কোণাভূপাতগুলি নির্ণয়।

উদা. 1. If  $\sin A = \frac{1}{3}$ , find  $\cos A$ ,  $\tan A$  and  $\sec A$ .

এক্ষেপে  $\sin A = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{1}{3}$ .

(এং চিত্রে) মনে কর,  $PM = 1$  দৈর্ঘ্য একক এবং  $OP = 3$  দৈর্ঘ্য একক।

$\therefore OM^2 = OP^2 - PM^2 = 9 - 1 = 8; \therefore OM = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ .

এক্ষেপে  $\cos A = \frac{OM}{OP} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ,  $\tan A = \frac{PM}{OM} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

এবং  $\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ .

উদা. 2. If  $\cos x = \frac{3}{5}$ , find  $\tan x$ ,  $\sec x$  and  $\operatorname{cosec} x$ .

[ D. B. '48 ]

(এং চিত্রে) মনে কর,  $OM = 3$  দৈর্ঘ্য একক এবং  $OP = 5$  দৈর্ঘ্য একক।

অতএব,  $PM^2 = OP^2 - OM^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16, \therefore PM = 4$ .

এক্ষেপে,  $\tan x = \frac{PM}{OM} = \frac{4}{3}$ ;  $\sec x = \frac{OP}{OM} = \frac{5}{3}$ ;

এবং  $\operatorname{cosec} x = \frac{OP}{PM} = \frac{5}{4}$ .

উদা. 3. The tangent of an angle is  $\frac{3}{4}$ ; find the other trigonometrical ratios.

এখানে  $\tan \theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{3}{4}$ .

এং চিত্রে মনে কর,  $PM = 3$  দৈর্ঘ্য একক এবং  $OM = 4$  দৈর্ঘ্য একক।

$\therefore OP^2 = PM^2 + OM^2 = 3^2 + 4^2 = 25, \therefore OP = 5$ .

এক্ষেপে  $\sin \theta = \frac{PM}{OP} = \frac{3}{5}$ ,  $\cos \theta = \frac{OM}{OP} = \frac{4}{5}$ ,  $\cot \theta = \frac{OM}{PM} = \frac{4}{3}$ ,

$\sec \theta = \frac{OP}{OM} = \frac{5}{4}$  এবং  $\operatorname{cosec} \theta = \frac{OP}{PM} = \frac{5}{3}$ .

উদা. 4. If  $\cos \theta = \frac{3}{5}$ , where  $\theta$  is a positive acute angle, find  $\cot \theta$ .

এখানে  $\cos \theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{3}{5}$ . এং চিত্রে মনে কর,  $OM = 3$  দৈর্ঘ্য একক

এং  $OP = 5$  দৈর্ঘ্য একক।  $\therefore PM^2 + OM^2 = OP^2$ ,

$$\therefore PM^2 = OP^2 - OM^2 = 5^2 - 3^2 = 16, \therefore PM = 4.$$

$$\therefore \cot \theta = \frac{OM}{PM} = \frac{3}{4}.$$

উদা. 5. If cosine of an acute angle is  $\sqrt{1-a^2}$ , find its sine and show that its cotangent is  $\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$ .

মনে কর, কোণটি  $\theta$ , সুতরাং  $\cos \theta = \sqrt{1-a^2}$  (সীকার)।

$$\therefore \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \therefore \sin^2 \theta + (\sqrt{1-a^2})^2 = 1,$$

$$\text{বা, } \sin^2 \theta + 1 - a^2 = 1, \text{ বা, } \sin^2 \theta = a^2, \therefore \sin \theta = a.$$

$$\text{আবার, } \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}.$$

উদা. 6. If the tangent of an acute angle is  $c$ , prove that its  $\sin = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$ . [C. U. '42]

মনে কর, প্রদত্ত কোণটি  $\theta$ , সুতরাং  $\tan \theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = c$ .

(এং চিত্রে) মনে কর,  $PM = c$  দৈর্ঘ্য একক এবং  $OM = 1$  দৈর্ঘ্য একক।

$$\therefore OP^2 = PM^2 + OM^2 = c^2 + 1, \therefore OP = \sqrt{1+c^2}.$$

$$\text{একগে, } \sin \theta = \frac{PM}{OP} = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}.$$

[ অল্প প্রণালী ]  $\therefore \tan \theta = c, \therefore \cot \theta = \frac{1}{c}.$

একশে,  $\operatorname{cosec}^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta = 1 + \frac{1}{c^2} = \frac{c^2 + 1}{c^2}$

$\therefore \operatorname{cosec} \theta = \frac{\sqrt{1+c^2}}{c}, \therefore \sin \theta = \frac{1}{\operatorname{cosec} \theta} = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}.$

উদা. 7. If  $\tan \theta = \sqrt{3}$ , show that  $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

[উদা. 3এর মত কর। মনে কর,  $PM = \sqrt{3}$  দৈর্ঘ্য একক এবং  $OM = 1$  দৈর্ঘ্য একক।]

### Exercise 3

1. Express all other trigonometrical ratios in terms of the cosine.

✓ 2. If  $\sin A = \frac{3}{5}$ , find  $\tan A$  and  $\sec A$ .

3. If  $\cos A = \frac{1}{3}$ , find  $\cot A$  and  $\operatorname{cosec} A$ .

4. If  $\tan A = \frac{3}{4}$ , find  $\sin A$  and  $\sec A$ .

✓ 5. If  $\cot A = \sqrt{7}$ , find the value of  $\frac{\operatorname{cosec}^2 A - \sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A}$

6. If  $\sec A = \frac{6}{5}$ , find  $\tan A$  and  $\operatorname{cosec} A$ .

✓ 7. If  $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ , prove that  $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{6}}.$

8. If  $\cos \theta = \frac{3}{5}$ , show that  $\tan \theta = \frac{4}{3}.$

✓ 9. If  $\sec A = \frac{4}{3}$ , show that  $\cot A = \frac{3}{\sqrt{7}}$

✓ 10. If  $\cot A = \frac{x}{y}$ , show that  $\operatorname{cosec} A = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y}.$

✓ 11. If  $\operatorname{cosec} A = \frac{a}{b}$ , show that  $\tan A = \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$



✓12. Sine of an acute angle is  $x$ . Prove that its cosine  $\sqrt{1-x^2}$  and its tangent  $= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ . [C.U.'41 ; E.B.S.B.'51]

13. The tangent of an angle is  $\frac{4}{3}$ , find other direct trigonometrical ratios. [E. B. S. B. '51]

14. If  $\cot A + \operatorname{cosec} A = 3$ , find  $\cos A$ .

15. If  $\tan A + \sec A = \frac{2}{\sqrt{3}}$ , find  $\sin A$ .

16. If  $\sin A = \frac{3}{5}$ ,  $\cos B = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , where  $A$  and  $B$  are positive acute angles, find the value of  $\frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$ . [W. B. S. F. '58]

85. কয়েকটি নির্দিষ্ট কোণের কোণানুপাত নির্ণয়।

(i)  $30^\circ$  কোণের কোণানুপাতগুলি নির্ণয় কর।

মনে কর,  $\angle AOB = 30^\circ$  এবং  $PM \perp OA$ .

এখন  $\angle OPM = 60^\circ$  হইল।  $PM$ কে  $Q$  পর্যন্ত একপে বর্ধিত কর যেন  $MQ = PM$  হয়।  $QO$  যোগ কর।

$POM$  ও  $QOM$  ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম;

কারণ,  $PM = MQ$ ,  $OM$  বাহু সাধারণ এবং

$\angle OMP = \angle OMQ$  (সমকোণ বলিয়া);

$\therefore \angle QOM = 30^\circ$ ,  $\therefore \angle POQ = 60^\circ$ . ৭নং চিত্র

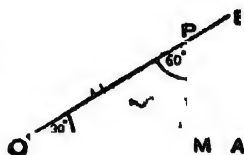
$\therefore OPQ$  ত্রিভুজের  $\angle P$  ও  $\angle POQ$  প্রত্যেকে  $60^\circ$ ,  $\therefore \angle Q = 60^\circ$ ,

$\therefore POQ$  একটি সমবাহু ত্রিভুজ।  $\therefore PO = PQ = 2PM$ ,  $\therefore PM = \frac{1}{2}OP$ .

আবার,  $OM^2 = OP^2 - PM^2 = OP^2 - (\frac{1}{2}OP)^2 = OP^2 - \frac{1}{4}OP^2 = \frac{3}{4}OP^2$ ,

$\therefore OM = \frac{\sqrt{3}}{2}OP$ .  $\sin 30^\circ = \frac{PM}{OP} = \frac{\frac{1}{2}OP}{OP} = \frac{1}{2}$ ;

অতঃপর  $\operatorname{cosec} 30^\circ = \frac{1}{\sin 30^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ .



$$\cos 30^\circ = \frac{OM}{OP} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} OP}{OP} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{সুতরাং } \sec 30^\circ = \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$\tan 30^\circ = \frac{PM}{OM} = \frac{\frac{1}{2} OP}{\frac{\sqrt{3}}{2} OP} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\text{সুতরাং } \cot 30^\circ = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}.$$

(2)  $60^\circ$  কোণের কোণাঙ্কপাত নির্ণয়।

(এনং চিত্রে)  $\angle OPM = 60^\circ$ , উহার সম্পর্কে  $OM = \frac{\sqrt{3}}{2} OP$ ,

ভূমি  $PM = \frac{1}{2} OP$  এবং অতিভুজ  $= OP$ .

$$\therefore \sin 60^\circ = \frac{OM}{OP} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} OP}{OP} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \text{ সুতরাং } \operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$\cos 60^\circ = \frac{PM}{OP} = \frac{\frac{1}{2} OP}{OP} = \frac{1}{2}; \text{ সুতরাং } \sec 60^\circ = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

$$\tan 60^\circ = \frac{OM}{PM} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} OP}{\frac{1}{2} OP} = \sqrt{3}; \text{ সুতরাং } \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

[ জটব্য :  $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$ ,  $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ$ ,  $\tan 30^\circ = \cot 60^\circ$ ,  $\cot 30^\circ = \tan 60^\circ$ ,  $\operatorname{cosec} 30^\circ = \sec 60^\circ$ ,  $\sec 30^\circ = \operatorname{cosec} 60^\circ$ . ]

(3)  $45^\circ$  কোণের কোণাঙ্কপাত নির্ণয়।

(এনং চিত্রে) মনে কর,  $\angle AOB = 45^\circ$ ; OB-স্থিত P বিন্দু হইতে  $PM \perp AO$  টানা হইল। সুতরাং  $\angle OMP = 90^\circ$ .  $\therefore$  অবশিষ্ট  $\angle OPM = 45^\circ = \angle AOB$ .

$$\therefore OM = PM. \text{ আবার, } OP^2 = OM^2 + PM^2 = 2PM^2 = 2MO^2.$$

$$\therefore PM^2 = \frac{1}{2} OP^2, \therefore PM = \frac{1}{\sqrt{2}} OP \text{ এবং } OM = \frac{1}{\sqrt{2}} OP.$$

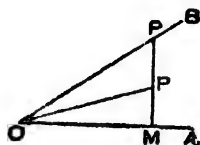
$$\therefore \sin 45^\circ = \frac{PM}{OP} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} OP}{OP} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \text{ সুতরাং } \operatorname{cosec} 45^\circ = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}.$$

$$\cos 45^\circ = \frac{OM}{OP} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} OP}{OP} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ সুতরাং } \sec 45^\circ = \sqrt{2}.$$

$$\tan 45^\circ = \frac{PM}{OM} = \frac{OM}{OM} = 1, \text{ সুতরাং } \cot 45^\circ = 1.$$

কৃষ্ণ (4)  $0^\circ$  কোণের কোণানুপাত নির্ণয়।

মনে কর,  $\angle AOB$  একটি সূক্ষ্ম কোণ এবং  $OB$ -স্থিত  $P$  বিন্দু হইতে  $PM \perp OA$ । এখন দেখ,  $\angle AOB$  ক্রমশঃ বড় হইতে ছোট হইবে,  $PM$  লম্ব এবং অভিলম্ব  $OP$  ক্রমশঃ তত ছোট হইবে। এইরূপে  $\angle AOB = 0^\circ$  হইলে,  $OP$  এবং  $OM$  মিশিয়া গিয়া  $PM=0$  এবং  $OP=OM$  হইবে।



৮নং চিত্র

$$\therefore \sin 0^\circ = \frac{PM}{OP} = \frac{0}{OP} = 0, \cos 0^\circ = \frac{OM}{OP} = \frac{OM}{OM} = 1,$$

$$\tan 0^\circ = \frac{PM}{OM} = \frac{0}{OM} = 0, \cot 0^\circ = \frac{OM}{PM}, \text{ এখানে } OM \text{ একটি}$$

লম্বীয় রাশি এবং  $PM$  অসীমরূপে ক্ষুদ্র অর্থাৎ 0 বলিয়া  $\frac{OM}{PM} = \text{অসীম বৃহৎ রাশি}$  অর্থাৎ  $\infty$  হইবে।  $\therefore \cot 0^\circ = \infty$  (infinity).

$$\text{অতএব, } \operatorname{cosec} \theta = \frac{OP}{PM} = \infty, \text{ এবং } \sec \theta = \frac{OP}{OM} = 1.$$

কৃষ্ণ (5)  $90^\circ$  কোণের কোণানুপাত নির্ণয়।

মনে কর,  $\angle AOB$  একটি সূক্ষ্ম কোণ এবং  $OB$ -স্থিত  $P$  বিন্দু হইতে  $PM \perp OA$ । এখন এই কোণটি ক্রমশঃ বড় হইবে,  $OM$  ক্রমশঃ ততই ছোট এবং  $PM$  ক্রমশঃ  $OP$ -র নিকটতর হইতে থাকিবে। এইভাবে  $\angle AOB = 90^\circ$  হইলে, তখন  $OB \perp OA$  হইবে এবং  $PM$  ও  $OP$  মিশিয়া  $OM=0$  এবং  $PM=OP$  হইবে।



৯নং চিত্র

$$\sin 90^\circ = \frac{PM}{OP} = \frac{OP}{OP} = 1, \cos 90^\circ = \frac{OM}{OP} = \frac{0}{OP} = 0;$$

$$\tan 90^\circ = \frac{PM}{OM} = \frac{\text{একটি সসীম রাশি}}{\text{একটি অসীম ক্ষুদ্র রাশি}} = \infty,$$

$$\text{সুতরাং } \cot 90^\circ = \frac{OM}{PM} = \frac{0}{OP} = 0.$$

$$\operatorname{cosec} 90^\circ = \frac{OP}{PM} = \frac{PM}{PM} = 1, \text{ এবং } \sec 90^\circ = \frac{OP}{OM} = \infty.$$

[ জ্ঞেয় :  $\sin 0^\circ = 0 = \cos 90^\circ$ ;  $\sin 90^\circ = 1 = \cos 0^\circ$ ;  
 $\tan 90^\circ = \rightarrow \infty = \cot 0^\circ$ ,  $\operatorname{cosec} 0^\circ = \rightarrow \infty = \sec 90^\circ$  ]

৪৯.  $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  ও  $90^\circ$  কোণগুলির ত্রিকোণমিতিক অস্থাপত্য-  
 গুলির মান মনে রাখিতে হইবে। নিম্নে তালিকা দেখ—

কোণ	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
সাইন	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
কস	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
ট্যান	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\infty$

[ জ্ঞেয় : Sine ও cos জানা থাকিলে অত্যন্ত কোণস্থাপত্যগুলি সহজেই  
 নির্ণয় করা যায়। আবার দেখ,  $0^\circ, 30^\circ$  ও  $45^\circ$  কোণের কেবল sine ও cos  
 জানা থাকিলে, তাহা হইতে তালিকার অত্যন্ত কোণের কোণস্থাপত্যগুলি নির্ণয়  
 করা যায়। অতএব ঐগুলি মুখস্থ রাখিবে। Sine-এর মান মনে রাখিবার  
 কৌশল আছে। 0, 1, 2, 3 ও 4 লিখিয়া প্রত্যেকটিকে 4 দ্বারা ভাগ করিয়া  
 ভাগের বর্গমূল নির্ণয় কর। এই বর্গমূলগুলিই অর্থাৎ  $\sqrt{\frac{0}{4}}, \sqrt{\frac{1}{4}}, \sqrt{\frac{2}{4}}, \sqrt{\frac{3}{4}},$   
 $\sqrt{\frac{4}{4}}$  যথাক্রমে  $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  ও  $90^\circ$  কোণের sine হইবে। ]

87. পুরক কোণের কোণানুপাত নির্ণয়।

কোন কোণের সাইন, তাহার পুরক কোণের কসের সমান হয়

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta, \cot(90^\circ - \theta) = \tan \theta,$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta, \sec(90^\circ - \theta) = \operatorname{cosec} \theta$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \cot \theta, \operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) = \sec \theta.$$

### বিবিধ প্রশ্নের সমাধান

উদা. 1. Verify that  $\sin^2 30^\circ + \sin^2 45^\circ + \cos^2 60^\circ = 1$

$$\text{বামপক্ষ} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1.$$

উদা. 2. Show that  $\cos 60^\circ = 1 - 2 \sin^2 30^\circ$ . [E.B.S.B. '49]

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2};$$

$$\text{আবার } 1 - 2 \sin^2 30^\circ = 1 - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - 2 \times \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore \cos 60^\circ = 1 - 2 \sin^2 30^\circ.$$

উদা. 3. Prove that  $\frac{2 \tan 30^\circ}{1 - \tan^2 30^\circ} = \sqrt{3}$ . [C. U. '40]

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{2 \times \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{2} = \sqrt{3}.$$

উদা. 4. Find the numerical value of  $\tan^2 30^\circ + 2 \sin 60^\circ + \tan 45^\circ - \tan 60^\circ + \cos^2 30^\circ$ . [G. U. '48]

$$\begin{aligned} \text{প্রদত্ত রাশি} &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - \sqrt{3} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{3} + \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} + \frac{3}{4} = \frac{1}{3} + 1 + \frac{3}{4} = \frac{19}{12} = 2\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

উদা. 5. Find the numerical value of  $\sin^3 30^\circ + 4 \cot^2 45^\circ - \sec^2 60^\circ$ . [ C. U. '50 ]

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 4.(1)^2 - (2)^2 = \frac{1}{8} + 4 - 4 = \frac{1}{8}.$$

উদা. 6. Find the numerical value of  $\tan^2 45^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \tan 30^\circ \cdot \tan^3 60^\circ$ . [ C. U. '49 ]

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = (1)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (\sqrt{3})^3 = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times 3 = 1\frac{1}{2}.$$

উদা. 7. Find simplest value of  $3 \tan^2 45^\circ - \sin^2 60^\circ - \frac{1}{2} \cot^2 30^\circ + \frac{1}{8} \sec^2 45^\circ$ . [ C. U. '51 ]

$$\begin{aligned} \text{প্রদত্ত রাশি} &= 3.(1)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{3})^2 + \frac{1}{8} (\sqrt{2})^2 \\ &= 3 - \frac{3}{4} - \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = 1. \end{aligned}$$

উদা. 8. If  $\tan \theta = \frac{3}{4}$ , find the other trigonometrical ratios.

মনে কর, AOB সমকোণী ত্রিভুজের  $\angle A$  সমকোণ এবং  $\angle O = \theta$ .

$\therefore \tan \theta = \frac{3}{4}$ ,  $\therefore$  লম্ব AB=3 হইলে, ভূমি OA=4 হইবে।

$\therefore OB^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ ,  $\therefore OB = \sqrt{25} = 5$ .

এক্ষে,  $\sin \theta = \frac{AB}{OB} = \frac{3}{5}$ ,  $\cos \theta = \frac{OA}{OB} = \frac{4}{5}$ ,  $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$ .

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{5}{3} = \frac{5}{3} \text{ এবং } \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{5}{4} = \frac{5}{4}.$$

উদা. 9. Prove that  $\sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{1-\cos 30^\circ}} = \sec 60^\circ + \tan 60^\circ$ .

[ C. U. '42 ]

$$\begin{aligned} \text{বামপক্ষ} &= \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{(\bullet+\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}} \\ &= \sqrt{\frac{(2+\sqrt{3})^2}{1}} = 2+\sqrt{3}. \end{aligned}$$

আবার, ডানপক্ষ  $\sec 60^\circ + \tan 60^\circ = 2 + \sqrt{3}$ .  $\therefore$  উভয় পক্ষ সমান।

উদা. 10. Show that  $\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} \tan \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3}$ .

এখানে কোণগুলির বৃত্তীয় মান দেওয়া আছে।  $\pi$  রেডিয়ান =  $180^\circ$ ,

$$\therefore \text{বামপক্ষ} = \sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \tan 45^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4},$$

$$\text{এবং ডানপক্ষ} = \sin 30^\circ \cos 60^\circ + \sin 90^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{4} + 1 = 1\frac{1}{4}.$$

$\therefore$  উভয় পক্ষ সমান।

উদা. 11. Show that  $\frac{1+2 \sin 60^\circ \cos 60^\circ}{\sin 60^\circ + \cos 60^\circ} + \frac{1-2 \sin 60^\circ \cos 60^\circ}{\sin 60^\circ - \cos 60^\circ} = 2 \cos 30^\circ$ . [ C. U. '41 ]

$$\begin{aligned} \text{বামপক্ষ} &= \frac{1+2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}} + \frac{1-2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} + \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} \\ &= \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \\ &= \frac{(2+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1) + (2-\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} \\ &= \frac{2\sqrt{3}+3-2-\sqrt{3}+2\sqrt{3}-3+2-\sqrt{3}}{3-1} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\text{ডানপক্ষ} = 2 \cos 30^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}. \therefore \text{উভয় পক্ষ সমান।}$$

উদা. 12. Simplify :  $\frac{2 \tan^2 30^\circ}{1 - \tan^2 30^\circ} + (\sec^2 45^\circ - \cot^2 45^\circ) - (\sin^2 30^\circ + \sin^2 60^\circ)$ . [ G. U. '50 ]

$$\begin{aligned} \text{প্রদত্ত রাশি} &= \frac{2 \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2}{1 - \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2} + \{ (\sqrt{2})^2 - (1)^2 \} - \left\{ \left( \frac{1}{2} \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3}} + \{ 2 - 1 \} - \left\{ \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \right\} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} + 1 - 1 = \frac{2 \times 3}{3 \times 2} = 1. \end{aligned}$$

Exercise 4

1. Prove that :—

$$(1) \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \text{ and } \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad [\text{C. U. '41}]$$

$$(2) \tan 60^\circ = \sqrt{3} \text{ and } \operatorname{cosec} 30^\circ = 2 \quad [\text{C. U. '43, '45}]$$

$$(3) \cot 30^\circ = \sqrt{3} \text{ and } \sin 90^\circ = 1 \quad [\text{C. U. '44}]$$

$$(4) \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (5) \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad [\text{G. U. '51}]$$

2. Find the value of  $\cos 60^\circ$ ,  $\sec 30^\circ$  and  $\cot 60^\circ$ .

[C. U. '47]

3. Find the value of  $4 \sin^2 45^\circ + \tan^2 60^\circ + \operatorname{cosec}^2 30^\circ$ .

[C. U. '40]

4. Find the numerical value of  $\cot^2 \frac{\pi}{4} + \sin^3 \frac{\pi}{6} - \cos^3 \frac{\pi}{3}$ .

5. Find the simplest value of  $4 \sin^2 30^\circ + 2 \cos^2 45^\circ - 3 \cos^2 60^\circ$ .

6. Simplify  $\frac{\sec^2 45^\circ - \cot^2 45^\circ}{\sin^2 60^\circ + \cos^2 30^\circ} + \frac{\tan^2 90^\circ - \cos^2 60^\circ}{\frac{1}{4} \tan^2 30^\circ}$ .

7. Prove that  $\tan 30^\circ \cdot \sin 60^\circ + \tan 60^\circ \cdot \cos 30^\circ = 2$ .

8. Prove that  $\sin \frac{\pi}{3} \cdot \tan \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 2 \sin^2 \frac{\pi}{4}$ .

9. Show that  $\sqrt{\frac{1 + \sin 30^\circ}{1 - \sin 30^\circ}} = \sec 60^\circ \sin 60^\circ$ .

10. Prove that

$$\frac{1 + 2 \sin 60^\circ \cos 60^\circ}{\sin 60^\circ + \cos 60^\circ} + \frac{1 - 2 \sin 60^\circ \cos 60^\circ}{\sin 60^\circ - \cos 60^\circ} = 2 \cos 30^\circ.$$

[C. U. '41]

11. Find the value of  $\cot^2 30^\circ - 2 \cos^2 60^\circ - \frac{3}{4} \sec^2 45^\circ - 4 \sin^2 30^\circ$ .

[W. B. S. F. '52]



12. Find the value of  $\frac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 30^\circ} + \cos 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 60^\circ \sin 30^\circ$ . [W. B. S. F. '53]

13. Find the value of  $\frac{1 - \sin^2 30^\circ}{1 + \sin^2 45^\circ} \times \frac{\cos^2 60^\circ + \cos^2 30^\circ}{\operatorname{cosec}^2 90^\circ - \cot^2 90^\circ}$   $\div$   $(\sin 60^\circ \tan 30^\circ)$ . [G. U. '54]

### ৪৪. অপনয়ন ( Elimination )

উদা. 1. Eliminate A from the equations  $x = a \sin A$ ,  
 $y = b \cos A$ .

$\therefore x = a \sin A, \therefore \frac{x}{a} = \sin A$  ; এবং  $\therefore y = b \cos A, \therefore \frac{y}{b} = \cos A$

একত্র,  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2 A + \cos^2 A = 1. \therefore \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

উদা. 2. Eliminate B from  $x = a \sin B, y = \frac{a}{\sec B}$ .

$\therefore x = a \sin B, \therefore \frac{x}{a} = \sin B$ .

আবার,  $\therefore y = \frac{a}{\sec B} \therefore y = a \times \frac{1}{\sec B} = a \cos B$ ,

$\therefore \frac{y}{a} = \cos B$ .

একত্র  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \sin^2 B + \cos^2 B = 1, \therefore x^2 + y^2 = a^2$ .

উদা. 3. If  $x = a \sec \theta, y = b \tan \theta$ , prove that  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

[G. U. '51]

$\therefore x = a \sec \theta, \therefore \frac{x}{a} = \sec \theta, \therefore \frac{x^2}{a^2} = \sec^2 \theta$ ;

$\therefore y = b \tan \theta, \therefore \frac{y}{b} = \tan \theta, \therefore \frac{y^2}{b^2} = \tan^2 \theta$ ;

একটি,  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta - \tan^2 \theta = 1.$

$\therefore \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$

উদা. 4. If  $\sin \theta + \cos \theta = a$  and  $\tan \theta + \cot \theta = b$ , show that  $b(a^2 - 1) = 2.$

$\tan \theta + \cot \theta = b$ , বা,  $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = b$ , বা,  $\frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = b$ ,

বা,  $\frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = b$ ,  $\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{b} \dots (1).$

আবার,  $\because \sin \theta + \cos \theta = a$ ,  $\therefore \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta = a^2$ ,

বা,  $1 + 2 \sin \theta \cos \theta = a^2$ , বা,  $2 \sin \theta \cos \theta = a^2 - 1 \dots (2).$

$\therefore (1) \text{ ও } (2) \text{ হইতে } 2 \times \frac{1}{b} = a^2 - 1$ , বা,  $\frac{2}{b} = a^2 - 1$ ,  $\therefore b(a^2 - 1) = 2.$

উদা. 5. If  $\sin A + \cos A = m$ , and  $\sec A + \operatorname{cosec} A = n$ ,

prove that  $n(m^2 - 1) = 2m$ . [ B. U. ]

$n(m^2 - 1) = (\sec A + \operatorname{cosec} A) \{ (\sin A + \cos A)^2 - 1 \}$

$= \left( \frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\sin A} \right) (\sin^2 A + \cos^2 A + 2 \sin A \cos A - 1)$

$= \left( \frac{\sin A + \cos A}{\cos A \sin A} \right) (1 + 2 \sin A \cos A - 1)$

$= \frac{m}{\sin A \cos A} \times 2 \sin A \cos A = 2m.$

উদা. 6. If  $\tan A + \sin A = m$ , and  $\tan A - \sin A = n$ , prove that  $m^2 - n^2 = 4 \sqrt{mn}$ . [ C. U. '14 ]

এখানে  $m + n = \tan A + \sin A + \tan A - \sin A = 2 \tan A$ , •

এবং  $m - n = 2 \sin A.$

$$\begin{aligned}
 \text{আবার, } mn &= (\tan A + \sin A)(\tan A - \sin A) = \tan^2 A - \sin^2 A \\
 &= \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} - \sin^2 A = \sin^2 A \left( \frac{1}{\cos^2 A} - 1 \right) = \sin^2 A \left( \frac{1 - \cos^2 A}{\cos^2 A} \right) \\
 &= \sin^2 A \times \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} = \sin^2 A \tan^2 A. \quad \therefore \sqrt{mn} = \sin A \tan A.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{একদে, } m^2 - n^2 &= (m+n)(m-n) \\
 &= 2 \tan A \cdot 2 \sin A = 4 \tan A \sin A = 4 \sqrt{mn}.
 \end{aligned}$$

উদা. 7. If  $\sin A = m$  and  $\tan A = n$ , proved that  $\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} = 1$ .

$$\text{এখানে } \frac{1}{\sin A} = \frac{1}{m} \text{ এবং } \frac{1}{\tan A} = \frac{1}{n}, \therefore \frac{1}{\sin^2 A} = \frac{1}{m^2} \text{ এবং } \frac{1}{\tan^2 A} = \frac{1}{n^2}.$$

$$\therefore \frac{1}{\sin^2 A} - \frac{1}{\tan^2 A} = \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}, \text{ বা, } \operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2},$$

$$\text{বা, } 1 + \cot^2 A - \cot^2 A = \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}, \therefore \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} = 1.$$

### Exercise 5

Eliminate  $\theta$  from the following equations :-

1.  $x = a \sin \theta$  and  $y = b \cos \theta$ .
2.  $x = b \cos \theta$ ,  $y = b \sin \theta$ .
3.  $x = a(\sec \theta + \tan \theta)$ ,  $y = a(\sec \theta - \tan \theta)$ .
4.  $a = b(\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta)$ ,  $c = b(\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta)$ .
5.  $x = a \tan \theta$ ,  $y = b \cot \theta$ .
6. If  $\sin A = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}$ , show that  $n \cos A = m \sin A$ .
7. If  $\cos \theta = p$  and  $\cot \theta = q$ , show that  $\frac{1}{p^2} - \frac{1}{q^2} = 1$ .
8. If  $\cos \theta = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2}$ , show that  $\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta = \frac{p}{q}$ .

[ Hints : আগে  $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$  হইতে  $\cos \theta$  র মান বসাইয়া  $\sin \theta$  র মান নির্ণয় কর।  $\sin \theta = \frac{2pq}{p^2 + q^2}$  হইবে। তারপর  $\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta$   
 $= \frac{1}{\sin \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$  ধর। ...]

9. If  $\sin \theta - \cos \theta = 1$ , show that  $\sin \theta + \cos \theta = \pm 1$ .

10. If  $\sin \theta = \frac{2mn}{m^2 + n^2}$ , show that  $\sec \theta + \tan \theta = \frac{m+n}{m-n}$ .

89. বিবিধ সমীকরণের সমাধান।

উদা 1. Solve  $2 \cos \theta = \sec \theta$ .

$2 \cos \theta = \sec \theta$ , বা  $2 \cos \theta = \frac{1}{\cos \theta}$ , বা  $2 \cos^2 \theta = 1$ , বা  $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}$ ,

বা,  $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ; কিন্তু  $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\therefore \cos \theta = \cos 45^\circ$ .

$\therefore \theta = 45^\circ$ .

[ জটিল্য : মানের সীমা :  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  এই সূত্র হইতে আমরা জানি যে  $\sin^2 \theta$  ও  $\cos^2 \theta$  প্রত্যেকটি পূর্ণবর্গ বলিয়া ধনাত্মক, উহা ঋণাত্মক (negative) হইতে পারে না। অতএব,  $\sin^2 \theta$  বা  $\cos^2 \theta$  কোনটিরই মান 1 অপেক্ষা বেশী হইতে পারে না। কারণ, উহাদের সমষ্টি 1 বলিয়া কোনটির মান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে অত্রটির মান ঋণাত্মক হইয়া পড়িবে, কিন্তু তাহা অসম্ভব। অতএব,  $\theta$  কোণের পরিমাণ যাহাই হউক না কেন,  $\sin \theta$  এবং  $\cos \theta$  এর সাংখ্যমান কখনও 1এব অধিক (2, -2, +3.5 এইরূপ) হইতে পারে না। যদি  $\sin \theta$  বা  $\cos \theta$  কোনটির মান -2, -3 প্রভৃতি হয়, তবে সেটির বর্গের মান 4, 9 প্রভৃতি হইবে এবং তখন অপরটির বর্গের ( $\sin^2 \theta$  বা  $\cos^2 \theta$ ) মান ঋণাত্মক হইবে, কিন্তু তাহা অসম্ভব। অতএব  $\sin \theta$  ও  $\cos \theta$  এর মানের সীমা -1 হইতে +1 পর্যন্ত হইবে। তাহা হইলে উহাদের অন্তোগাতক বলিয়া  $\sec \theta$  ও  $\operatorname{cosec} \theta$  এর সাংখ্যমান কখন 1 এর কম হইতে পারে না।  $\tan \theta$  ও  $\cot \theta$  এর মান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর বা ক্ষুদ্রতর হইতে পারে। ]

উদা. 2. If  $2 \sin A = 2 - \cos A$ , find  $\sin A$ .

$$2 \sin A = 2 - \cos A,$$

$$\text{বা, } 2 \sin A - 2 = -\cos A, \text{ বা } (2 \sin A - 2)^2 = (-\cos A)^2,$$

$$\text{বা, } 4 \sin^2 A - 8 \sin A + 4 = \cos^2 A = 1 - \sin^2 A,$$

$$\text{বা, } 5 \sin^2 A - 8 \sin A + 3 = 0,$$

$$\text{বা, } 5 \sin^2 A - 5 \sin A - 3 \sin A + 3 = 0,$$

$$\text{বা, } (\sin A - 1)(5 \sin A - 3) = 0, \therefore \sin A = 1, \text{ বা } \frac{3}{5}.$$

উদা. 3. If  $2 \sin^2 \theta = 3 \cos \theta$ ; find  $\theta$ , if it be a positive acute angle. [C. U. '50]

$$2 \sin^2 \theta = 3 \cos \theta, \text{ বা, } 2(1 - \cos^2 \theta) = 3 \cos \theta,$$

$$\text{বা, } 2 \cos^2 \theta + 3 \cos \theta - 2 = 0,$$

$$\text{বা, } 2 \cos^2 \theta + 4 \cos \theta - \cos \theta - 2 = 0,$$

$$\text{বা, } (2 \cos \theta - 1)(\cos \theta + 2) = 0, \therefore \cos \theta = \frac{1}{2}, \text{ বা } -2,$$

প্রদত্ত সর্ত অনুসারে  $\cos \theta$ -র মান  $-1$  অপেক্ষা ছোট বা  $+1$  অপেক্ষা বড় হইতে পারে না বলিয়া  $\cos \theta = -2$  হইতে পারে না।

$$\therefore \cos \theta = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ. \therefore \theta = 60^\circ.$$

উদা. 4. Solve  $\sin \theta + \operatorname{cosec} \theta = \frac{7}{2\sqrt{3}}$ , if  $\theta$  be a positive acute angle.

$$\sin \theta + \operatorname{cosec} \theta = \frac{7}{2\sqrt{3}}, \text{ বা, } \sin \theta + \frac{1}{\sin \theta} = \frac{7}{2\sqrt{3}},$$

$$\text{বা, } \sin^2 \theta + 1 = \frac{7 \sin \theta}{2\sqrt{3}} \quad [\sin \theta \text{ দ্বারা গুণ করিয়া}]$$

$$\text{বা, } 2\sqrt{3} \sin^2 \theta + 2\sqrt{3} = 7 \sin \theta,$$

$$\text{বা, } 2\sqrt{3} \sin^2 \theta - 7 \sin \theta + 2\sqrt{3} = 0,$$

$$\text{বা, } 2\sqrt{3} \sin^2 \theta - 4 \sin \theta - 3 \sin \theta + 2\sqrt{3} = 0,$$

$$\text{বা, } 2 \sin \theta (\sqrt{3} \sin \theta - 2) - \sqrt{3}(\sqrt{3} \sin \theta - 2) = 0,$$

$$\text{বা, } (2 \sin \theta - \sqrt{3})(\sqrt{3} \sin \theta - 2) = 0$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ বা } \frac{2}{\sqrt{3}}. \text{ এখানে কেহহু প্রদত্ত সর্ত অনুসারে}$$

$$\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ হইতে পারে না, } \therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ, \therefore \theta = 60^\circ.$$

উদা. 5. Solve  $\cos 12A = \sin 6A$ .

কোন কোণের sine তাহার অল্পপূরক কোণের cosine-এর সমান হয়।

$$\therefore \cos 12A = \sin 6A = \cos(90^\circ - 6A)$$

$$\therefore 12A = 90^\circ - 6A, \text{ বা, } 18A = 90^\circ, \therefore A = 5^\circ.$$

উদা. 6. If  $r \cos \theta = 2\sqrt{3}$  and  $r \sin \theta = 2$ , where  $\theta$  is an acute angle, find  $r$  and  $\theta$ . [C. U. '45 ; G. U. '49]

$$\therefore r \cos \theta = 2\sqrt{3} \dots (1) \text{ এবং } r \sin \theta = 2 \dots (2)$$

$$\therefore (1) \div (2) \text{ করিয়া পাই } \frac{r \cos \theta}{r \sin \theta} = \frac{2\sqrt{3}}{2}, \text{ বা } \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \sqrt{3},$$

$$\text{বা, } \cot \theta = \sqrt{3} = \cot 30^\circ. \therefore \theta = 30^\circ.$$

$$\text{এক্ষণে (1) হইতে পাই } r \cos 30^\circ = 2\sqrt{3}, \text{ বা, } r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore r = \frac{2\sqrt{3} \times 2}{\sqrt{3}} = 4. \text{ অতএব, } r = 4 \text{ এবং } \theta = 30^\circ.$$

[G. U. '52 এর এই প্রশ্নেই  $r \cos \theta = 2$ ,  $r \sin \theta = 2\sqrt{3}$  ছিল।

উত্তর:  $r = 4$ ,  $\theta = 60^\circ$ ]

উদা. 7. If  $\tan^2 45^\circ - \cos^2 60^\circ = x \sin 45^\circ \cos 45^\circ \tan 60^\circ$ , find the value of  $x$ . [C. U. '49]

$$\text{প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই } (1)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3},$$

$$\text{বা, } 1 - \frac{1}{4} = x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ বা, } \frac{3}{4} = x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore x = \frac{3}{4} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

উদা. 8. Solve  $\frac{\sin A + \cos A}{\sin A - \cos A} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$ .

$$\text{Comp. \& dividendo দ্বারা পাই } \frac{2 \sin A}{2 \cos A} = \frac{2\sqrt{3}}{2}, \text{ বা, } \frac{\sin A}{\cos A} = \sqrt{3},$$

$$\text{বা, } \tan A = \sqrt{3} = \tan 60^\circ, \therefore A = 60^\circ.$$

উদা. ৯. If  $1 + \sin^2 A = 3 \sin A \cos A$ , find  $\tan A$  and deduce that one value of  $\sin A$  is  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . [C. U, '50]

$$1 + \sin^2 A = 3 \sin A \cos A,$$

$$\text{বা, } \cos^2 A + \sin^2 A + \sin^2 A = 3 \sin A \cos A,$$

$$\text{বা, } \cos^2 A - 3 \sin A \cos A + 2 \sin^2 A = 0,$$

$$\text{বা, } \cos^2 A - 2 \sin A \cos A - \sin A \cos A + 2 \sin^2 A = 0,$$

$$\text{বা, } (\cos A - 2 \sin A)(\cos A - \sin A) = 0,$$

$$\therefore \cos A - 2 \sin A = 0 \dots (1) \text{ অথবা, } \cos A - \sin A = 0 \dots (2).$$

$$(1) \text{ হইতে পাই } \cos A = 2 \sin A,$$

$$\text{বা, } \frac{1}{2} = \frac{\sin A}{\cos A} \text{ (উভয় পক্ষকে } 2 \cos A \text{ দ্বারা ভাগ করিয়া), } \therefore \tan A = \frac{1}{2}.$$

$$(2) \text{ হইতে পাই } \cos A = \sin A, \text{ বা, } 1 = \frac{\sin A}{\cos A} = \tan A.$$

$$\therefore \tan A = 1 \text{ বা } \frac{1}{2}.$$

আবার,  $\because \cos A = \sin A. \therefore A = 45^\circ$  [কারণ,  $45^\circ$  কোণেরই সাইন

$$\text{ও কস সমান হয়}] \quad \sin A = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$[ \text{*অন্য প্রণালী : } \sin A = \cos A = \sin (90^\circ - A).$$

$$\therefore A = 90^\circ - A, \text{ বা, } 2A = 90^\circ, \therefore A = 45^\circ.$$

$$\therefore \sin A = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} ]$$

### Exercise 6

Solve the following :—

$$H-1. \quad 3 \tan \theta = \cot \theta$$

$$2. \quad 4 \cos A = \sec A.$$

$$3. \quad \tan A + \cot A = \frac{5}{2}$$

$$4. \quad \sin A + \cos A = 1.$$

$$5. \quad \sec \theta + \cos \theta = \frac{5}{2}.$$

$$6. \quad 2 \sin \theta = \operatorname{cosec} \theta.$$

$$7. \quad \sin \theta + \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$8. \quad \cot 5\theta = \tan 10\theta.$$

$$9. \quad \sin 10\theta = \cos 8\theta.$$

$$10. \quad \text{If } \tan A + \cot A - 2 = 0, \text{ find } \sin A.$$

11. If  $x \tan \theta = \sqrt{3}$  and  $x \cot \theta = 3\sqrt{3}$ , find  $x$  and  $\theta$ ,  $\theta$  being an acute angle.

12. If  $p \sin \theta = \sqrt{3}$  and  $p \cos \theta = 1$ , where  $\theta$  is an acute angle, find  $p$  and  $\theta$ .

13. If  $x \sin 30^\circ \tan 60^\circ \cos 30^\circ = \sin^2 60^\circ - \sec^2 45^\circ$ , find the value of  $x$ .

14. Given that  $2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 1$ , where  $\theta$  is a positive acute angle, prove that  $\cot \theta = \sqrt{3}$ . [ C. U. '51 ]

15. Solve  $\frac{\sec \theta + \tan \theta}{\sec \theta - \tan \theta} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$

16. Solve  $2 \sin^2 \theta + 3 \cos \theta = 3$ . [ Pat. U. '50 ]

17. Solve  $\sec A + \tan A = \sqrt{3} + 1$

## ত্রিকোণমিত্তির ব্যবহারিক প্রয়োগ

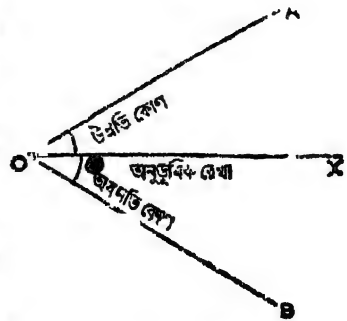
### উচ্চতা ও দূরত্ব ( Height and distance )

দুর্গম গিরিশৃঙ্গের উচ্চতা, দ্রুতর বিশাল নদীর বিস্তার এবং চন্দ্র, সূর্য, নক্ষত্রাদির দূরত্ব প্রভৃতি নির্ণয় এই ত্রিকোণমিত্তির প্রয়োগ ও সাহায্যেই হয়।

90. উন্নতি কোণ ( Angle of elevation ) এবং অবনতি কোণ ( Angle of depression ) :

ভূমিতলের সমান্তরাল সরলরেখাকে অনুভূমিক ( horizontal ) সরল রেখা এবং উহার উপর লম্বভাবে অবস্থিত সরলরেখাকে উল্লম্ব বা লম্বরেখা ( vertical line ) বলে।

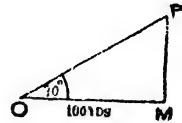
মনে কব,  $OX$  একটি অনুভূমিক সরলরেখা এবং ঐ রেখার উপরের দিকে  $A$  বিন্দু এবং নীচের দিকে  $B$  বিন্দু অবস্থিত। যদি কোন ব্যক্তি  $O$  বিন্দুতে তার চক্ষু নিবদ্ধ রাখিয়া  $A$  ও  $B$  বিন্দুর প্রতি দৃষ্টিপাত করে, তবে  $XOA$  কোণটিকে  $A$  বিন্দুর উন্নতি কোণ বা কোণিক উন্নতি এবং  $XOB$  কোণটিকে  $B$  বিন্দুর অবনতি কোণ বা কোণিক অবনতি বলে।





এখানে মনে রাখিবে যে, পর্যবেক্ষকের চক্ষুর অবস্থান-বিন্দুর ভিতর দিয়া অঙ্কিত বা কল্পিত অল্পভূমিক রেখার উপর দিকে কোন নির্দিষ্ট বিন্দু যে কোণ উৎপন্ন করে, তাহাকে উক্ত বিন্দুর কৌণিক উন্নতি বলে এবং ঐ রেখার নীচের দিকে কোন নির্দিষ্ট বিন্দু যে কোণ উৎপন্ন করে, তাহাকে উক্ত বিন্দুর কৌণিক অবনতি বলে।

উদা. 1. মনে কর, PM একটি পাহাড় এবং উহার তলদেশ হইতে 100 গজ দূরে O বিন্দুতে ঐ পাহাড়ের চূড়া P বিন্দুর উন্নতি-কোণ  $30^\circ$  ঐ পাহাড়টির উচ্চতা নির্ণয় করিতে হইবে।



১০নং চিত্র

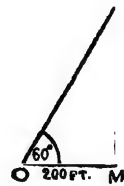
এখানে PM উচ্চতা, OM = 100 গজ এবং  $\angle MOP = 30^\circ$ , অর্থাৎ POM সমকোণী ত্রিভুজটির ভূমি দেওয়া আছে, লম্ব নির্ণয় করিতে হইবে। অতএব, লম্ব ও ভূমির অনুপাত হইতে উহা নির্ণয় করা যাইবে।

$$\frac{PM}{OM} = \tan \angle POM = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}, \therefore \frac{PM}{100} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\therefore PM = \frac{100}{\sqrt{3}} \text{ গজ} = \frac{100 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} \text{ গজ} = \frac{100 \sqrt{3}}{3} \text{ গজ} = 57.7 \text{ গজ}$$

উদা. 2. The angle of elevation of the top of a chimney at a distance of 200 ft. is  $60^\circ$ . Find the height of the chimney. [ C. U. 1927 ]

মনে কর, ভূমির উপর লম্বভাবে দণ্ডায়মান চিমনির উচ্চতা PM এবং M বিন্দুর ভিতর দিয়া অঙ্কিত অল্পভূমিক রেখার উপর 200 ফুট দূরে অবস্থিত O বিন্দু হইতে P বিন্দুর উন্নতি-কোণ  $\angle POM = 60^\circ$ .



১১নং চিত্র

$$\text{এক্ষণে, } \frac{PM}{OM} = \tan 60^\circ,$$

$$\text{বা, } \frac{PM}{200} = \sqrt{3}, \therefore PM = 200\sqrt{3} \text{ ফু.} = 346.4 \text{ ফু.}$$

**উদা. ৩.** A tree on the bank of a river is 50 ft. high and the angle of elevation of the top of the tree from a point on the opposite bank is observed to be  $30^\circ$ . Find the breadth of the river.

(১১ নং চিত্র আঁক) মনে কর, নদীর এক তীরে অবস্থিত PM বৃক্ষটি 50 ফুট উচ্চ এবং উহার অপর তীরে বিপরীত দিকে অবস্থিত O বিন্দু হইতে Pর উন্নতি-কোণ  $\angle POM = 30^\circ$ . নদীর বিস্তার OM নির্ণয় করিতে হইবে।  
এখানে  $\frac{PM}{OM} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , বা  $\frac{50}{OM} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $\therefore OM = 50\sqrt{3}$  ফুট।

**উদা. ৪.** Find the length of the shadow of a pillar 60 ft. high on the horizontal plane through its foot, when the angle of elevation of the sun is  $60^\circ$ .

[ ১২নং চিত্র আঁক ] মনে কর, PM একটি 60 ফুট উচ্চ স্তম্ভ, সূর্যের অবস্থান S বিন্দুতে এবং সূর্যের রশ্মি SPর দিক হইতে আসিতেছে এবং ভূমির উপর PM-এর ছায়া OM হইয়াছে। O বিন্দু হইতে সূর্যের উন্নতি কোণ  $60^\circ$ .

এখানে  $\frac{PM}{OM} = \tan 60^\circ$ , বা  $\frac{60}{OM} = \sqrt{3}$ , বা  $OM \sqrt{3} = 60$ ,  $\therefore OM = \frac{60}{\sqrt{3}}$ .

$\therefore$  ছায়ার দৈর্ঘ্য  $= 20\sqrt{3}$  ফুট  $= 34.64$  ফুট।

**উদা. ৫.** Find the angle of elevation of the sun when the shadow of a pole 9 ft. high is  $3\sqrt{3}$  ft. long. [C. U. '56]

মনে কর, PM খুঁটির উচ্চতা 9 ফুট, S সূর্যের অবস্থান এবং সূর্যরশ্মি PSর দিকে আসিয়া ভূমির উপর PM-এর ছায়া OM উৎপন্ন করিয়াছে।  $OM = 3\sqrt{3}$  ফুট। সূর্যের উন্নতি-কোণ বা  $\angle POM$  নির্ণয় করিতে হইবে।

এক্ষেণে,  $\tan \angle POM = \frac{PM}{OM} = \frac{9}{3\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ ,

কিন্তু  $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$  হয়।  $\therefore \angle POM = 60^\circ$ .



১২নং চিত্র

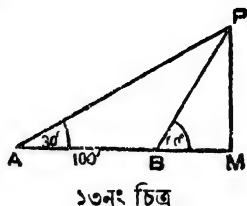
**উদা. 6.** A vertical chimney subtends angles of  $30^\circ$  and  $60^\circ$  at points A and B which lie in a horizontal line through the base of the chimney. Find its height if AB is 100 ft.

[ C. U. '40 ]

মনে কর, চিমনির উচ্চতা PM,  $\angle PAM = 30^\circ$ ,  
 $\angle PBM = 60^\circ$  এবং AB = 100 ফুট।

এক্ষেপে,  $\frac{AM}{PM} = \cot 30^\circ = \sqrt{3} \dots (1)$

এবং  $\frac{BM}{PM} = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \dots (2)$



$\therefore (1) - (2)$  করিয়া পাই  $\frac{AM - BM}{PM} = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3 - 1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

বা,  $\frac{100}{PM} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ , বা  $2 PM = 100\sqrt{3}$ ,  $\therefore PM = 50\sqrt{3}$  ফুট।

$\therefore$  চিমনির উচ্চতা =  $50\sqrt{3}$  ফুট. = 86.6 ফুট।

**উদা. 7.** The shadow of a chimney is found to diminish 50 ft. in length when the angles of elevation of the sun changes from  $30^\circ$  to  $60^\circ$ . Find the height of the chimney.

[C. U. '43]

[ ১৩নং চিত্র ঐক ] মনে কর, PM চিমনির ছায়া AM এবং A বিন্দু হইতে সূর্যের উন্নতি-কোণ  $\angle PAM = 30^\circ$ ; আবার, মনে কর B বিন্দু হইতে সূর্যের উন্নতি-কোণ  $\angle PBM = 60^\circ$  এবং তখন PM চিমনির ছায়া BM, পূর্বছায়া AM হ্রাসে 50 ফুট কম, অর্থাৎ AB = 50 ফুট। চিমনির উচ্চতা নির্ণয় করিতে হইবে।

এক্ষেপে,  $\frac{AM}{PM} = \cot 30^\circ = \sqrt{3}$ , এবং  $\frac{BM}{PM} = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,

$\therefore$  (বিয়োগ করিয়া)  $\frac{AM - BM}{PM} = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}$ , বা,  $\frac{50}{PM} = \frac{3 - 1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ,

বা,  $2 PM = 50\sqrt{3}$ ,  $\therefore PM = 25\sqrt{3}$ ,

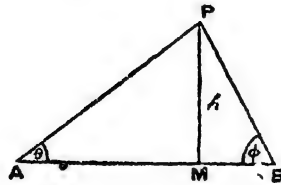
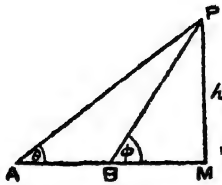
অর্থাৎ চিমনির উচ্চতা  $= 25\sqrt{3}$  ফুট।

**উদা. ৪.** The angular elevations of the top of a tower from two points in the same horizontal line with its foot are observed to be  $\theta$  and  $\phi$  respectively. Find the distance between the two points of observation, if the height of the tower is  $h$ . [ C. U. '42 ]

যে বিন্দুদ্বয় হইতে স্তম্ভশীর্ষের উন্নতি-কোণ দেখা যাইতেছে, তাহারা স্তম্ভের একই পার্শ্বে অথবা পরস্পর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত থাকিতে পারে। মনে কর, PM স্তম্ভের উচ্চতা  $h$  এবং প্রথম চিত্রে উহার একই পার্শ্বস্থিত এবং দ্বিতীয় চিত্রে উহার দুই পার্শ্বস্থিত A ও B বিন্দু হইতে P-র উন্নতি-কোণ যথাক্রমে  $\theta$  ও  $\phi$ .

AB দূরত্ব নির্ণয় করিতে হইবে। উভয় চিত্রে  $\frac{AM}{PM} = \cot \theta \dots\dots(1)$

এবং  $\frac{BM}{PM} = \cot \phi \dots\dots(2)$



১৪নং চিত্র

প্রথম পক্ষে (1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই  $\frac{AM - BM}{PM} = \cot \theta - \cot \phi$ ,

বা,  $\frac{AB}{h} = \cot \theta - \cot \phi$ ,  $\therefore AB = h (\cot \theta - \cot \phi)$ . [উত্তর]

দ্বিতীয় পক্ষে (1) ও (2) যোগ করিয়া পাই,  $\frac{AM + BM}{PM} = \cot \theta + \cot \phi$ ,

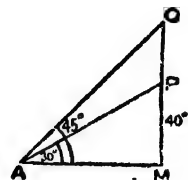
বা,  $\frac{AB}{h} = \cot \theta + \cot \phi$ ,  $\therefore AB = h (\cot \theta + \cot \phi)$ . [উত্তর]

উদা. ৯. A post stands on the top of a pillar 40 ft. high. The elevations of the tops of the pillar and the post are respectively  $30^\circ$  and  $45^\circ$  to an observer standing on the horizontal line from the foot of the pillar. Find the length of the post and the distance of the observer from the pillar.

মনে কর, PM স্তম্ভের উপর PQ খুঁটি অবস্থিত এবং A বিন্দু হইতে P ও Q বিন্দুর উন্নতি-কোণস্বরূপ  $\angle PAM = 30^\circ$  এবং  $\angle QAM = 45^\circ$ . PM = 40 ফুট। PQ ও AM নির্ণয় করিতে হইবে।

এক্ষণে,  $\frac{QM}{AM} = \tan 45^\circ = 1$ ,  $\therefore QM = AM$ .

আবার,  $\frac{PM}{AM} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , বা,  $\frac{40}{AM} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .



এবং চিত্র

$$\therefore AM = 40\sqrt{3}, \therefore PQ = QM - PM = AM - PM = 40\sqrt{3} - 40 = 40(\sqrt{3} - 1) = 40(1.732 - 1) = 29.28 \text{ ফুট।}$$

$\therefore$  নির্ণেয় দূরত্ব =  $40\sqrt{3}$  ফুট = 69.28 ফুট, এবং খুঁটির দৈর্ঘ্য = 29.28 ফুট।

উদা. ১০. A man, standing on the bank of a river, observes that the angle subtended by a tower, just on the opposite bank is  $60^\circ$ , but when he retires 60 ft. from the bank he finds the angle to be  $30^\circ$ ; find the height of the tower and the breadth of the river.

[ ১৩নং চিত্র আঁক ] চিত্রে MP স্তম্ভের উচ্চতা ও BM নদীর প্রস্থ, অতএব,  $\angle PBM = 60^\circ$ ; লোকটি B বিন্দু হইতে সরিয়া 60 ফুট পিছনে A বিন্দু হইতে দেখিল  $\angle PAM = 30^\circ$ .

এক্ষণে,  $\frac{AM}{PM} = \cot 30^\circ = \sqrt{3}$ , এবং  $\frac{BM}{PM} = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\therefore (\text{বিয়োগ করিয়া}) \frac{AM - BM}{PM} = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \text{ বা, } \frac{60}{PM} = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

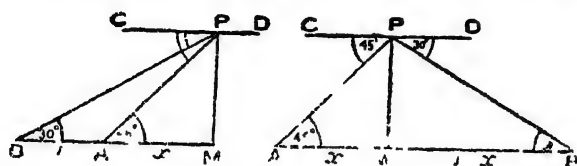
$$\therefore PM = 30\sqrt{3}, \therefore \text{স্তম্ভের উচ্চতা} = 30\sqrt{3} \text{ ফুট} = 30 \times 1.732 \text{ ফুট} = 51.96 \text{ ফুট।}$$

আবার,  $\frac{BM}{PM} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $\therefore BM = \frac{1}{\sqrt{3}} \times PM = \frac{1}{\sqrt{3}} \times 30\sqrt{3} = 30$ .

অতএব, নদীর বিস্তার = 30 ফুট।

**উদা. 11.** From an aeroplane vertically above a straight road the angles of depression of two consecutive mile-stones on the road are observed to be  $45^\circ$  and  $30^\circ$ . Find the height of the aeroplane above the road. - [ C. U. '41, G. U. '49 ]

মনে কর, উভয় চিত্রে A ও B দুইটি মাইলপোস্ট এবং P বিন্দু এরোপ্লেনের



১৬নং চিত্র

অবস্থান, সুতরাং লম্ব PM উহার উচ্চতা। এখানে  $\angle PAM = 45^\circ$ ,  $\angle PBM = 30^\circ$ , এবং  $AB = 1$  মাইল। মনে কর,  $AM = x$  মাইল, সুতরাং প্রথম চিত্রে  $BM = (1+x)$  মাইল এবং দ্বিতীয় চিত্রে  $BM = (1-x)$  মাইল।

এক্ষণে,  $\frac{PM}{AM} = \tan 45^\circ = 1$ , বা,  $\frac{PM}{x} = 1$ ,  $\therefore PM = x$ .

প্রথম চিত্রে,  $\frac{PM}{BM} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , বা,  $\frac{x}{1+x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , বা,  $x\sqrt{3} = 1+x$ ,

বা,  $x\sqrt{3} - x = 1$ , বা,  $x(\sqrt{3} - 1) = 1$ ,

$\therefore x = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{3 - 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} = 1.37$  ( আসন্ন )।

দ্বিতীয় চিত্রে,  $\frac{PM}{BM} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , বা,  $\frac{x}{1-x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , বা  $x\sqrt{3} = 1-x$ ,

বা,  $x\sqrt{3} + x = 1$ , বা  $x(\sqrt{3} + 1) = 1$ ,

$\therefore x = \frac{1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} = .37$  ( আসন্ন )।

$\therefore$  এরোপ্লেনের উচ্চতা = 1.37 মাইল, বা .37 মাইল।

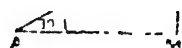
**উদা. 12.** A vertical post 15 ft. high is broken at a certain height, and its upper part, not completely separated, meets the ground at an angle of  $30^\circ$ . Find the height at which the post is broken. [ G. U. '51 ]

মনে কর, ভূমির উপর M বিন্দুতে অবস্থিত PM খুঁটিটি Q বিন্দুতে ভাঙ্গিয়াছে এবং উহার অগ্রভাগ নত হইয়া A বিন্দুতে ভূমির উপর পড়িয়াছে, সুতরাং AQ হইল PQ এর নতুন অবস্থান। অতএব,  $PQ = AQ$  এবং  $\angle QAM = 30^\circ$  হইল।

মনে কর,  $QM = x$  ফুট,

সুতরাং  $AQ = PQ = (15 - x)$  ফুট।

এক্ষণে,  $\frac{QM}{AQ} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ , বা,  $\frac{x}{15-x} = \frac{1}{2}$ ।



বা,  $2x = 15 - x$ , বা,  $3x = 15$ ,  $x = 5$ ।

১৭নং চিত্র

অতএব, খুঁটিটি ৫ ফুট উপরে ভাঙ্গিয়াছে।

**উদা. 13.** A long upright pole broke at a certain height, one end of the broken portion was tied to the top of the unbroken part, the other end lying on the ground at a distance of 20 ft. from the bottom of the pole. The angle of inclination of this transverse portion was measured and found to be  $30^\circ$ . How high was the pole originally?

[E. B. S. B. '40]

[পূর্ব উদাহরণের চিত্রটি আঁক] মনে কর, ভূমির উপর M বিন্দুতে অবস্থিত PM খুঁটি Q বিন্দুতে ভাঙ্গিয়াছে এবং উহার অগ্রভাগ অর্থাৎ P বিন্দু ভূমির উপর A বিন্দুতে পড়িয়াছে। সুতরাং  $AM = 20$  ফুট,  $\angle QAM = 30^\circ$ , এবং  $PM = AQ + QM$  হইল।

এক্ষণে,  $\frac{QM}{AM} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , বা,  $\frac{QM}{20} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , বা,  $QM = \frac{20}{\sqrt{3}} = \frac{20\sqrt{3}}{3}$ ।

আবার,  $\frac{AM}{AQ} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

বা,  $\frac{20}{AQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , বা,  $AQ\sqrt{3} = 40$ , বা,  $AQ = \frac{40}{\sqrt{3}} = \frac{40\sqrt{3}}{3}$ .

$\therefore$  খুঁটির দৈর্ঘ্য  $= AQ + QM = \left(\frac{40\sqrt{3}}{3} + \frac{20\sqrt{3}}{3}\right)$  ফুট  $= \frac{60\sqrt{3}}{3}$  ফুট  
 $= 20\sqrt{3}$  ফুট  $= 20 \times 1.732$  ফুট  $= 34.64$  ফুট।

**উদা. 14.** From the top of a cliff 150 ft. high the angles of depression of the top and bottom of a pillar are found to be  $30^\circ$  and  $60^\circ$  respectively, find the height of the pillar.

মনে কর, PM পাহাড়টি 150 ফুট এবং AB স্তম্ভটি  $x$  ফুট উচ্চ।  $PC \parallel MA$  টানা হইল, সুতরাং  $\angle CPB = 30^\circ$  ও  $\angle CPA = 60^\circ$  হইল। ABর বর্ধিত অংশ যেন PCকে C বিন্দুতে ছেদ করিল, সুতরাং  $BC = AC - AB = PM - AB = 150 - x$ .

এক্ষণে,  $\angle PAM = \angle APC = 60^\circ$ ,

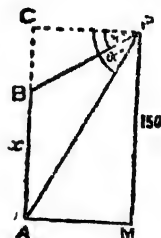
$\therefore \frac{AM}{PM} = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore AM = \frac{PM}{\sqrt{3}} = \frac{150}{\sqrt{3}} = \frac{150\sqrt{3}}{3} = 50\sqrt{3}$ .

আবার,  $\frac{BC}{AM} = \frac{BC}{PC} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,

বা,  $\frac{150 - x}{50\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$  [ $\because AM = 50\sqrt{3}$ ], বা,  $150 - x = 50$ ,

$\therefore x = 100$ .  $\therefore$  স্তম্ভের উচ্চতা = 100 ফুট।

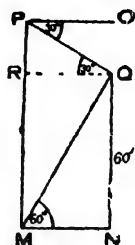


১৮নং চিত্র

**উদা. 15.** From the top and bottom of a cliff the angles of depression and elevation of the top of a pillar 60 ft. high are observed to be  $30^\circ$  and  $60^\circ$  respectively. Find the height of the cliff.



মনে কর, চিত্রে PM পাহাড়ের উচ্চতা  $h$ , QN স্তম্ভের উচ্চতা 60 ফুট এবং P বিন্দু হইতে Q বিন্দুর অবনতি-কোণ  $30^\circ$  ও M বিন্দু হইতে Q বিন্দুর উন্নতি-কোণ  $60^\circ$ . PO অভূমিক রেখা এবং  $QR \perp PM$  টানা হইল। এখন  $\angle OPQ = 30^\circ$  এবং  $\angle QMN = 60^\circ$  হইল।  $\therefore$  OP, QR ও NM একই সরল রেখা PM-এর উপর লম্ব,  $\therefore$  উহারা পরস্পর সমান্তরাল, হুতরাং  $\angle PQR = 30^\circ$  এবং  $\angle RQM = 60^\circ$ . এক্ষণে,  $RM = QN = 60'$ .



১৯নং চিত্র

$$\frac{QN}{MN} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}, \text{ বা, } \frac{60}{MN} = \sqrt{3},$$

$$\therefore MN = \frac{60}{\sqrt{3}} = \frac{60\sqrt{3}}{3} = 20\sqrt{3}. \text{ আবার, } \frac{PR}{RQ} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\text{বা, } \frac{PR}{MN} = \frac{1}{\sqrt{3}} [\because RQ = MN], \therefore PR = \frac{MN}{\sqrt{3}} = \frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 20.$$

$$\therefore PM = PR + RM = 20' + 60' = 80'. \therefore \text{পাহাড়ের উচ্চতা 80 ফুট।}$$

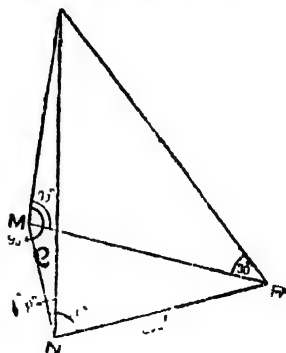
**উদা. 16.** A man finds that at a point due south of a tower the angle of elevation of its top is  $60^\circ$ , he then walks 200 ft. due east on a horizontal plane and finds that the angle of elevation is  $30^\circ$ ; find the height of the tower.

চিত্রে PM স্তম্ভের ঠিক দক্ষিণে N বিন্দু হইতে স্তম্ভশীর্ষের উন্নতি-কোণ  $60^\circ$ , লোকটি N বিন্দু হইতে ঠিক পূর্বদিকে 200' গিয়া R বিন্দু হইতে দেখিল উন্নতি-কোণ  $30^\circ$ , হুতরাং এখানে  $\angle MNP = 60^\circ$ ,  $\angle MRP = 30^\circ$ ,  $\angle MNR = 90^\circ$ ,  $\angle PMR = 90^\circ$ ,  $\angle PMN = 90^\circ$ . এক্ষণে PMN ত্রিভুজের ভূমি MN এবং PM লম্ব,  $\therefore \frac{PM}{MN} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$ ,

$$\therefore MN = \frac{PM}{\sqrt{3}}$$

$$\text{আবার, } \frac{PM}{MR} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\therefore MR = PM \sqrt{3}.$$



২০নং চিত্র

আবার,  $\angle MNR$  সমকোণ বলিয়া  $MR^2 = MN^2 + NR^2$ ,

$$\text{বা, } (PM\sqrt{3})^2 = \left(\frac{PM}{\sqrt{3}}\right)^2 + 200^2, \text{ বা } 3PM^2 = \frac{PM^2}{3} + 200^2$$

$$\text{বা, } 8PM^2 = 3 \times 200^2, \text{ বা, } PM^2 = \frac{3 \times 200^2}{8}.$$

$$\therefore PM = \frac{\sqrt{3} \times 200}{2\sqrt{2}} = \frac{100\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{100\sqrt{6}}{2} = 50\sqrt{6}$$

$$= 50 \times 2.44949 \dots = 122.47 \dots$$

$\therefore$  স্তম্ভের উচ্চতা = 122.47 ফুট ( আসন্ন ) ।

উদা. 17. From the top of a tree 20 ft. high the angles of elevation and depression of the top and base of a temple situated on the same horizontal plane are observed to be  $45^\circ$  and  $30^\circ$  respectively. Find the height of the temple.

[ U. U '51 ]

[ Hints : ( চিত্র নং ১৯ দেখ ) মনে কর QN বৃক্ষ 20 ফুট, PM মন্দির এবং Q হইতে P-এর উন্নতি-কোণ  $\angle PQR = 45^\circ$  ও M-এর অবনতি-কোণ

$$\angle RQM = 30^\circ. \text{ এক্ষেপে, } \frac{QN}{MN} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ বা } \frac{20}{MN} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\therefore MN = 20\sqrt{3}. \therefore RQ = MN = 20\sqrt{3},$$

$$\therefore PR = MN = 20\sqrt{3} \text{ ( কারণ, } \angle PQR = 45^\circ = \angle RPQ ),$$

$$\therefore PM = MR + PR = (20 + 20\sqrt{3}) \text{ ফুট} = (20 + 34.64) \text{ ফুট}$$

$$= 54.64 \text{ ফুট ( প্রায় ) ]}$$

### Exercise 7

- ✓H 1. A tower subtends an angle of  $30^\circ$  at a distance of 300 ft. from its foot; find its height.
- ✓H 2. The angle of elevation of the top of a monument at a distance of 150 yds. is  $60^\circ$ . Find the height of the monument.

3. The angle of elevation of the top of a chimney 60 ft. high seen from a distance in the same horizontal plane is  $30^\circ$ , find the distance.

4. Find the length of the shadow of a vertical stick 6 ft high on the horizontal plane through its foot, when the sun is at an altitude of  $30^\circ$ . [G. U. '50]

5. The shadow of a pole is  $3\sqrt{3}$  ft. long when the angle of elevation of the sun is  $60^\circ$ . Find the height of the pole.

6. A ladder 30 ft. long reaches the top of a wall and makes an angle of  $45^\circ$  with the ground; find the height of the wall.

7. What is the angle of elevation of the sun when the shadow of a post 24 ft. high is  $24\sqrt{3}$  ft. long?

8. Find the height of a chimney when it is found that on walking towards it 50 ft. in a horizontal line through its base the angular elevation changes from  $30^\circ$  to  $45^\circ$ .

[C. U. '51]

9. The angle of elevation of the top of a pillar is  $30^\circ$ , and on approaching 20 ft. nearer it is  $60^\circ$ . Find the height of the pillar. [G. U. '48]

10. The tree on the bank of a river is 45 ft. high and the angle of elevation of the top of the tree from a point just on the opposite bank is found to be  $60^\circ$ . Find the breadth of the river.

11. In advancing 60 ft. towards a tower, the altitude of its top is changed from  $45^\circ$  to  $60^\circ$ . Find the height of the tower. [E. B. S. B. '48]

12. The shadow of a tower standing on a level plane is found to be 40 ft. longer when the sun's altitude is  $45^\circ$  than when it is  $60^\circ$ . Find the height of the tower.

[C. U. '50, D. B. '51]

✓ 13. The horizontal distance between two pillars is 60 ft. and the angular depression of the top of the first as seen from the top of the second, which is 200 ft. high, is  $30^\circ$ , find the height of the first.

✓ 14. A vertical post 120 feet high is broken at a certain height, and its upper part, not completely separated, meets the ground at an angle of  $30^\circ$ . Find the height at which the post is broken. [C. U. '50]

✓ 15. The upper part of a tree, broken at a certain height, makes an angle of  $60^\circ$  with the ground at a distance of 10 feet from its root. Find the original height of the tree.

✓ 16. The angles of elevation of the top of a monument is  $30^\circ$  and  $60^\circ$  respectively when observed from two points P and Q lying on a horizontal line through the foot of the monument and on the same side of it. If  $PQ = 80$  ft., find the height of the monument. [C. U. '45 ; G. U. '52 ; E.B.S.B.'50]

✓ 17. The angle of elevation of the top of an unfinished pillar at a point 150 ft. from its base is  $30^\circ$ , how much higher must the pillar be raised so that its angle of elevation at the same point may be  $45^\circ$ ?

✓ 18. Find the angle of elevation of the sun when the length of the shadow of a post is to its height as  $\sqrt{3} : 1$ .

✓ 19. A man, standing on the bank of a river, finds that the angle subtended by a post just on the opposite bank is  $60^\circ$ , but when he retires 60 ft. from the bank he finds the angle to be  $30^\circ$ . Find the height of the post and the breadth of the river.

✓ 20. From a cliff 300 ft. high the angles of depression of the top and foot of a tower are observed to be  $30^\circ$  and  $60^\circ$  respectively. Find the height of the tower.

21. From an aeroplane vertically above a straight road the angles of depression of two consecutive mile-stones are observed to be  $30^\circ$  and  $60^\circ$  respectively. Find the height of the aeroplane above the road.

22. A man stands at a point A on the bank AB of a straight river, and observes that the line joining A to a point C on the opposite bank makes with AB an angle of  $30^\circ$ . He then goes 200 yards along the bank to B and finds that BC makes an angle of  $60^\circ$  with AB. Find the breadth of the river. [C. U. '44]

23. Two posts of the same height stand on either side of a road which is 40 ft. wide. At a point on the road between the posts the elevations of their tops are  $60^\circ$  and  $30^\circ$ . Find their height and the position of the point.

24. From a point due east the angle of elevation of the top of a tower is  $60^\circ$  and from another point due north it is observed to be  $45^\circ$ . If the distance between the two points is 200 yds., find the height of the tower.

25. The shadow of a tower standing on a level plane is 60 ft. longer when the altitude of the sun is  $30^\circ$  than when it is  $45^\circ$ . Find the height of the tower. [W. B. S. F. '52]

26. From the top of a tree the angle of depression of an object on the horizontal ground is found to be  $60^\circ$ . On descending 20 ft. from the top of the tree the angle of depression of the object is found to be  $30^\circ$ . Find the height of the tree. [U. U. '52]

---

# উত্তরমালা

## বীজগণিত

### Exercise 1

1. (i)  $-32a^{15}b^{10}$  (ii)  $729x^{12}y^{18}$  (iii)  $-\frac{a^5b^{10}}{32x^{10}y^5}$   
 (iv)  $a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$ .
2.  $a^6+6a^5+15a^4+20a^3+15a^2+6a+1$ .
3.  $x^7+7x^6y+21x^5y^2+35x^4y^3+35x^3y^4+21x^2y^5+7xy^6+y^7$ .
4.  $1+8a+24a^2+32a^3+16a^4$ .
5.  $a^5-10a^4+40a^3-80a^2+80a-32$ .
6.  $x^5-5x^4y+10x^3y^2-10x^2y^3+5xy^4-y^5$ .
7.  $x^6-6x^5+15x^4-20x^3+15x^2-6x+1$ .
8.  $32a^5-80a^4+80a^3-40a^2+10a-1$ .
9.  $729-1458c+1215c^2-540c^3+135c^4-18c^5+c^6$ .
10.  $32a^5+80a^4b+80a^3b^2+40a^2b^3+10ab^4+b^5$ .
11.  $32x^5-240x^4y+720x^3y^2-1080x^2y^3+810xy^4-243y^5$ .
12.  $243a^5+810a^4b+1080a^3b^2+720a^2b^3+240ab^4+32b^5$ .
13.  $a^8+8a^7+28a^6+56a^5+70a^4+56a^3+28a^2+8a+1$ .
14.  $x^9-9x^8+36x^7-84x^6+126x^5-126x^4+84x^3-36x^2$   
 $+9x-1$ .
15.  $a^{12}+6a^{10}+15a^8+20a^6+15a^4+6a^2+1$ .
16.  $x^{10}+5x^8+10x^6+10x^4+5x^2+1$ .
17.  $a^8-4a^6b^2+6a^4b^4-4a^2b^6+b^8$ .
18.  $1-6a^2+15a^4-20a^6+15a^8-6a^{10}+a^{12}$ .
19.  $x^3-y^3+z^3-3x^2y+3xy^2+3x^2z+3xz^2-3yz^2+3y^2z-6xyz$ .
20.  $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4-8a^3-24a^2b-24ab^2-8b^3+$   
 $24a^2+48ab+24b^2-32a-32b+16$ .

21. 64. 22. 32. 23. 128. 24. 256. 24. (a). - 1  
 25. 32. 26. 242. 27. 0. 28. 0.  
 29. 243. 30. 1. 31. 8.  
 32.  $10x^4y + 20x^2y^3 + 2y^5$ . 33.  $12x + 40x^3 + 12x^5$   
 34.  $2a^7 + 42a^5b^2 + 70a^3b^4 + 14ab^6$ .  
 35.  $12x^5a + 40x^3a^3 + 12xa^5$ .

## Exercise 2

1.  $(m^2 + mn + n^2)(m^2 - mn + n^2)$
2.  $(x^3 + 2x + 2)(x^3 - 2x + 2)$ . 3.  $(2x + z)(2x - 2z - z)$
4.  $(a + b - c - d)(a - b + c - d)$  5.  $(2x^2 + 6x + 9)(2x^2 - 6x + 9)$
6.  $(x^2 + 2x + 3)(x^2 - 2x + 3)$ . 7.  $(x^2 + 4x + 8)(x^2 - 4x + 8)$
8.  $(x^2 + 2x - 2)(x^2 - 2x - 2)$ .
9.  $(a + b + c)(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)$ .
10.  $(x + 3)(x^2 - 3x + 9)(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$ .
11.  $(x + y - 4a)(x - y - 2a)$ . 12.  $(3x + 11)(4x + 7)$
13.  $(3x + 7y)(7x - 3y)$ . 14.  $(2a^2 + 5)(2a + 3)(2a - 3)$
15.  $(a^2 + 2a - 4)(a^4 - 2a^3 + 8a^2 + 8a + 16)$ .
16.  $(a + b - 2c)(a^2 + b^2 + 4c^2 - ab + 2ac + 2bc)$ .
17.  $(a - 1)(a^2 - a - 4)$ . 18.  $(x + 2)(x - 1)(x + 15)$
19.  $(x + 2)(x + 3)(x + 4)$ . 20.  $(x + 1)(x - 5)(x - 2)^2$ .
21.  $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$ . 22.  $(c + d + a - b)(c + d - a + b)$
23.  $(5a - 3b)(15b - 13a)$ . 24.  $(x - 1)(x + 1)(x - 3)$ .
25.  $(a - 5)(a + 2)(a^2 - 3a + 12)$ .
26.  $(x^2 - 3x - 5)(x^2 - 3x - 17)$ . 27.  $(x + y)(y + z)(z + x)$ .
28.  $(x - y + z)(x^2 + y^2 + z^2 + xy - xz + yz)$ .
29.  $(a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c)$ .
30.  $-(a - b)(b - c)(c - a)(ab + ac + bc)$ .
31.  $(a + b)(b + c)(c + a)^2$ . 32.  $3(2x - 3y)(3y - z)(z - 2x)$
33.  $(x^2 + 5x + 3)(x^2 + 5x + 7)$ . 34.  $(x + a + 3)(x - a - 1)$ .
35.  $(x - 3)(2x + 3)(2x^2 - 3x + 7)$ . 36.  $3(a + b)(b - c)(a + 2b - c)$ .
37.  $(a + d + b + c)(a + d - b - c)(b - c + a - d)(b - c - a + d)$ .
38.  $2(a + c)(1 + a)(1 - c)$ . 39. (i)  $(x + 5)(5x + 1)(5x^2 + 14x + 20)$   
 (ii)  $(a^2 + 3a - 2)(a^2 + 3a - 3)$ .

40.  $(x^2+1)(x^2+x+1)$ . 41.  $(x-b)(x-c)(b-c)$ .  
 42.  $(x^2+2x+5)(x^4-2x^3-x^2-10x+25)$ .  
 43.  $(3a-2b+c)(2a+b+3c)$ .  
 44.  $(a^2-ab+b^2)(a^2-4ab+b^2)$ .  
 45.  $(a^2b^2+ab-c+1)(a^2b^2-ab+c+1)$   
 46.  $(x+1)(x^2-3x+1)(x^3+6x+1)$ .  
 47.  $-(x-y)(y-z)(z-x)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)$   
 48.  $5(a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ .

### Exercise 3

1. (i) 20 (ii) -4 (iii) -90 (iv)  $2n^3-3n^2+5n+6$ .  
 2. (i) 40 (ii) -31 (iii) -44 (iv) 688 (v)  $-3\frac{1}{2}$ .  
 6. 3 7. 174 9. 5 15.  $x^7+x^6y+x^5y^2+\dots+y^7$ .  
 16. যদি  $p+q+r+\dots+l+m=0$  হয়  
 17.  $(p-p')(p'q-pq')=(q-q')^2$ .  
 20.  $ap^3+bp^2+cp+d$ . 21.  $m=2kn$  ( $k$  একটি অখণ্ড বনসংখ্যা) ;

### Exercise 4

প্রথমটি  $x$  এর, দ্বিতীয়টি  $y$  এর এবং তৃতীয়টি  $z$  এর মান দেওয়া হইল।

1. 13, 6 ; 2. 5, 2 ; 3. 6, 2 ; 4. -3, 3, 1 ; 5. (a) 4, 10 ;  
 5. (b) 1, 2 ; 6. 3, 1 ; 7. 0, 2, 4 ; 8. 5, 1 ; 9.  $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$  ;  
 10.  $\frac{1}{4}$  -4 ; 11. 3, 2 ; 12. 3, 3, 3 ; 13. 1, 3, 5 ; 14. 20, 15, 12 ;  
 15.  $\pm 4, \pm 6, \pm 7$  ; 16.  $\frac{1}{2a}, \frac{1}{8a}, \frac{1}{4a}$  16. (a) 2, -1, 3 ;  
 17. 1, 1, 1 ; 18.  $a, b, c$  ; 19.  $bc(b-c), ca(c-a), ab(a-b)$  ;  
 20. 4, 3, 5 ; 21.  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$  ; 22.  $1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$  ;  
 23.  $bc+ab-ca, ab+ca-bc, ca+bc-ab$  ; 24.  $\pm 1, \pm 2, \pm 3$  ;  
 25.  $\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{b}{a^2+b^2}$  26.  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$  ; 27.  $\frac{ac-b-bc}{a^2-b^2}, \frac{a+ac-bc}{a^2-b^2}$  ;  
 28.  $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$  29. 1, 2, 3 ; 30. 4, 5, 6 ; 31. 12, 12, 12 ;  
 32. 10, 20, 5 ; 33. -2, 2, 1 ;  
 34.  $\frac{2}{a+b-c}, \frac{2}{a-b+c}, \frac{2}{b+c-a}$  ;  
 35.  $pq+pm+qm, pqm, p+q+m$ .



## Exercise 5

1. পিভার 38 ব., পুত্রের 14 ব. ; 2. 35, 45, ; 3. 69 ; 4. 1215, 15 ;
5.  $\frac{1}{2}$  ; 6. 93 ; 7. 72 , 8. 54 ; 9. 5 টা  $32\frac{4}{5}$  মি. ;
10. 84 পে. ; 11. ঘণ্টায় 2 মা. , 12. 2 : 3 ; 13. 21 ভোলা ;
14. 10 ঘণ্টা ; 15. 28 ; 16. ঘণ্টায় 2 মা. ও 4 মা. ;
17. নৌকা ঘণ্টায় 4 মা., স্রোত ঘণ্টায় 1 মা. ; 18. 84 ; 19. 1800 খুণ্টাক ,
20.  $\frac{3}{4}$  পে., 512 ; 21. চা 2 শি., কফি  $1\frac{1}{2}$  শি. ; 22. 123 ; 23. 180
- মাইল ; 24.  $\frac{4}{15}$  ; 25. 153 লেবু, 192 আপেল ; 26. 210 মা. ;
27. 709 ; 28. 27 ই. ; 30.  $\frac{2}{3}$  ; 31. 300 টা., 180 টা. ,
32. 21 মা., ঘণ্টায় 3 মা. , 33. 500 টা ; 34. 24, 5 ;
35. 45 মিনিট ; 36. ঘণ্টায় 20 মা., 10 মা. ; 37. 4 মি., 5 মি. ।

## Exercise 6

1. 9 2.  $\frac{1}{27}$  3. 243 4. 16 5.  $\frac{1}{9}$  6. 125
7.  $\frac{y^{\frac{1}{4}}}{x}$  8.  $x$  9.  $\frac{2}{3}a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{5}{3}}$  10. 1. 11.  $\left(\frac{a}{b^2}\right)^{\frac{1}{3}}$
12. -17 13.  $a^{-\frac{1}{6}}b^{-\frac{8}{3}}$  14.  $a^{-2}b$  15.  $a^{\frac{3}{2}}x$  16.  $\frac{2}{\sqrt{}}$
17.  $y^{\frac{5}{18}}$  17. (a)  $4^{\frac{3}{2}}/2$  18. (i)  $x^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{1}{4}} + 2x^{\frac{1}{4}} - 1 + 2x^{-\frac{1}{4}} - x^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{3}{4}}$
- and  $1 - y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} + y^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}y^{-1} + x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} - yx^{-\frac{1}{2}}$
18. (ii)  $a + 2b^{\frac{1}{3}} + 3c^{\frac{1}{3}}$  19.  $x^{2n} - y^{-2n}$  20.  $a^{-3m} + b^{3n}$
21.  $x^{2 \cdot 3^{n-1}} + x^{3^{n-1}} y^{3^{n-1}} + y^{2 \cdot 3^{n-1}}$
22.  $\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)$ , অথবা  $\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)$
23.  $(x^m + y^n)(x^m - y^n)$  24.  $x^a$  25.  $(a^4 - b^4)^m$
26.  $a^{n^2-1}$  27.  $x^{2n}b^a$  28.  $(x)^{-b^2}$  29.  $\frac{1}{x^{p^2} + q^2}$
30. 1 31. 27 32. 1 33. 1

34.  $\left(\frac{p}{q}\right)^{m+n}$  35. 1 36. 1 37.  $\frac{2}{3}$  38.  $\frac{e^x - 1}{e^x + 1}$
39. 1 40. 1 41.  $\left(\frac{a}{b}\right)^{mn}$  42.  $\frac{x^2}{(1-x)^{\frac{2}{3}}}$
42. (a). 1 43. 1 54.  $p = (q)^{\frac{2}{3q-1}}$

### Exercise 7

1.  $1^2/3^4, 1^2/5^3$  2 (i)  $\sqrt{4}, \sqrt[3]{1}, \sqrt{x^4}$  (iii)  $\sqrt[4]{b}, \sqrt[3]{27}, \sqrt{x^6}$
- 3  $\sqrt[3]{5}$  (i)  $\sqrt{5}, \sqrt[4]{12}, \sqrt[3]{1}$  (ii) ନାକାମିହି ଅ ଘେ
- (iii)  $\sqrt[3]{8}, \sqrt[4]{9}, \sqrt[2]{25}$  5.  $\sqrt{20}, \sqrt[3]{54}, \sqrt[4]{x^4y}$  6. (i)  $5\sqrt{7}$
- (ii)  $8\sqrt{7}$  (iii)  $4\sqrt[3]{3}$  (iv)  $5\sqrt[3]{3}$  (v)  $2\sqrt[3]{3}$
9. (i) 3 (ii)  $12\sqrt{5}$  (iii) 16 (iv)  $6\sqrt[3]{1944}$
10. (i)  $\frac{3}{2}\sqrt{10}$  (ii)  $2\sqrt[3]{2}$  (iii)  $\frac{1}{2}\sqrt[4]{20}$  11. (i) 1.06
- (ii) 2.31 (iii) 6.71 (iv) 3.1, (v) 5.83
12. (i) -1 (ii)  $3 + \sqrt{5} + \sqrt{14} + \sqrt{21}$
- (iii)  $24 + 8\sqrt{5} + 2\sqrt{15} + 3\sqrt{10}$  (iv)  $6\sqrt{15} + 12\sqrt{2} - 15 + 2\sqrt{30}$
- (v)  $2x - y$  (vi)  $\sqrt{a^3 + ab} - b\sqrt{a + b - a + b^2}$  (vii)  $4 + 6\sqrt{2}$
- (viii)  $x\sqrt{x} + \sqrt{xy} - xy$   $y\sqrt{y}$  13. (i)  $5 - 2\sqrt{6}$
- (ii)  $7 - 4\sqrt{3}$  (iii)  $14 + 4\sqrt{6}$  (iv)  $2x - 2\sqrt{x^2 - y^2}$
- (v)  $b^2 - 2a\sqrt{b^2 - a^2}$  (vi)  $4x + 2\sqrt{4x^2 - 25}$  14. (a).  $2 + \sqrt{3}$
- (b)  $2\sqrt{2} + \sqrt{6} - \sqrt{3} - 2$  (c)  $\frac{6\sqrt{10} + 3\sqrt{5} + 3\sqrt{2} + 1}{19}$
- (d)  $5 + 2\sqrt{5}$
15.  $\sqrt{3}$  16. 1.691 17.  $2x$  18.  $4x\sqrt{x^2 - 1}$
19.  $\sqrt{2}$  20.  $\frac{7 + \sqrt{5}}{11}$  21.  $\sqrt{a+x}$  22.  $x$
23.  $\frac{1}{3}$  24.  $\frac{1}{3}(3\sqrt{3} + 1)$  27. 0 28. 0.

## Exercise 8.

[ এখানে কেবল ধনাত্মক বর্গমূল দেওয়া হইল। তোমরা উত্তর বর্গমূলই দেখাইবে। যথা,  $\pm(a+b)$ ,  $\pm(x^2-2xy+7y^2)$ ,  $\pm(\sqrt{3}-\sqrt{2})$  ইত্যাদি। ]

$$1. a+b \quad 2. x^2-2xy+7y^2 \quad 3. x^3+3x^2-4x+2$$

$$4. x^2-ax+2a^2 \quad 5. a^{-2}+a^{-1}b^{-1}-b^{-2} \quad 6. 2x^{\frac{3}{2}}-3+4x^{-\frac{3}{2}}$$

$$7. 7x^2-5xy+6y^2 \quad 8. x^3-\frac{x}{2}-1$$

$$9. x^2-3x+a \quad 10. 1+a+\frac{a^2}{2} \quad 11. x-3-\frac{2}{x}$$

$$12. \frac{x}{y}-1+\frac{y}{x} \quad 13. 2a^2+1+3a^{-2} \quad 14. x^2-x+\frac{1}{4}$$

$$15. x^2-1+\frac{1}{x^2} \quad 16. x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}+1 \quad 17. \frac{x^2}{2}-2x+\frac{a}{3}$$

$$18. x^2+3x+1+\frac{1}{x} \quad 19. x^2+3x+\frac{1}{x} \quad 20. x^2+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}$$

$$21. \frac{x}{y}-\frac{1}{2}-\frac{y}{x} \quad 22. 2x^{\frac{3}{2}}-1+x^{-\frac{3}{2}} \quad 23. x-\frac{1}{x}+1$$

$$24. a+\frac{1}{a}-1 \quad 25. 2a^2+3a+\frac{3}{a} \quad 26. 2x^2-3xy+4y^2$$

$$27. x^2-ax+b^2 \quad 28. x^3-2x+\frac{1}{x^3} \quad 29. 3x+x^{\frac{1}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}$$

$$30. x^2+7x+11 \quad 31. 3x^2+7x-6 \quad 32. x^2+\frac{1}{x^2}-2$$

$$33. x^2-11x+19 \quad 34. \sqrt{2}(x^2+xy+y^2) \quad 35. \frac{2x}{x^2-1}$$

$$36. 3-\sqrt{5} \quad 37. \sqrt{3}-\sqrt{2} \quad 38. \sqrt{\frac{7}{3}}+\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$39. 2\sqrt{7}-\sqrt{5} \quad 40. a-\sqrt{ax}-a^2 \quad 41. \sqrt[4]{3}\left(\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$

$$42. \sqrt[4]{7}\left(\sqrt{\frac{7}{2}}-\sqrt{\frac{5}{2}}\right) \quad 43. \sqrt{x+3y}+\sqrt{x-3y} \quad 44. 2\sqrt{3x}-\sqrt{2y}$$

$$45. x=10 \quad 46. x=3 \quad 47. c=3 \quad 48. -41$$

$$49. a+2 \quad 50. 10 \quad 51. -a+1 \quad 52. 1$$

$$53. p^2=4q \quad 54. n^2=4mp \quad 55. 1+\frac{a^2}{2}-\frac{a^4}{8} \quad 56. a=\pm 2$$

$$57. \frac{a^2}{b^2}-\frac{a}{b}+1-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}$$

Exercise 9

1.  $5a^3b^4$  2.  $-9x^2y^{-1}$  3.  $-\frac{6a^5}{7b^6}$  4.  $2x+y$  5.  $a-1$   
 6.  $1+a+a^2$  7.  $2ax-3by$  8.  $\frac{2}{x^2}-3x$  9.  $\frac{a}{2}+1$  10. 85  
 11.  $4x^2-5y^2$  12.  $2a+b+c$  13.  $2a^2+a-3$  14.  $\frac{1}{3}a-\frac{1}{5}b$   
 15.  $\frac{a}{b}-1-\frac{b}{a}$  16.  $x-1+\frac{2}{x}$  17. 2.

Exercise 10

1.  $\pm 5$  2.  $\pm 1$  3.  $\pm \sqrt{2}$  4.  $\pm 2$   
 5.  $\frac{4}{3}, -\frac{5}{12}$  6.  $3, \frac{1}{3}$  7. 14, 24 8.  $\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}$   
 9.  $7, -4\frac{9}{7}$  10.  $9\frac{5}{7}, -11$  11.  $5\frac{2}{3}, 9\frac{1}{3}$  12. 3, 23  
 13.  $2, -\frac{9}{2}$  14.  $12, \frac{3}{2}$  15.  $3 \pm \sqrt{7}$  16. -3, 2  
 17.  $\sqrt{13} \pm 3$  18. 6, 9 19. 4, -24 20. 3, -4  
 21.  $5 \pm \sqrt{17}$  22. 3,  $\frac{68}{3}$  23. 9,  $\frac{1}{9}$  24. 6,  $\frac{1}{6}$   
 25. -4, 2 26. 5,  $\frac{6}{5}$  27. 0, -7 28. 0,  $2\frac{1}{2}$   
 29.  $-2a, -3a$  30.  $3 \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$  31.  $\frac{2}{5}$  32. 8 (অবান্তর বীজ  $\frac{1}{3}$ )  
 33.  $\sqrt{3} \pm 4$  34. 64, 27 35. 3 36.  $\frac{a(m-1)^2}{2m-1}$   
 37. 0, 1 38. 1,  $\frac{1}{\sqrt{4}}$  39. 5 40. 1  
 41. 4 42. 2, 1 43. 2, 3 44. -2, -2  
 45.  $\pm 2$  46. 7 47.  $\frac{1}{2}$  48. 2, 3  
 49.  $c, c-2b$  50.  $\pm 6$  51.  $x=1, y=\frac{1}{2}$  52. 2, 1  
 53. 6 54. 25 55.  $-\frac{37}{4}$  56. 5  
 57.  $\frac{ab}{a+b}$  58.  $3 \pm \frac{\sqrt{61}}{2}$  59. (i) 25, (ii)  $x=5, y=3$   
 60. 1, -2 61. 0,  $a+b$  62.  $\frac{1}{2}$  63. 2, -1 64. 0, 1  
 65.  $b \pm \frac{\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$  66. -a, -b 67.  $\pm \sqrt{\frac{a}{b}}, \pm \sqrt{\frac{b}{a}}$   
 68.  $\frac{3}{2}, -4$  69.  $x=3, y=3$  70.  $\pm \frac{2p}{\sqrt{5}}$

71.  $- \frac{3}{2}(1 \pm \sqrt{7})$

72. 43, -42

73.  $2\frac{2}{3}, -1\frac{1}{3}$

74.  $1, \frac{1}{a}$

75.  $1.85, -1.12$ .

## Exercise 11

1. 4 বা -1 বা -4

2.  $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}$

3. 5, 7, বা -7, -5

4. 10, 11 বা -11, -10

5. 7 বা -6

6. 11, 13, বা -13, -11

7. 121, 100 (২য় পক্ষে বর্গমূল -10 বসিতে হইবে)

8. 6, 8, বা -8, -6

9. 8", 15"

10. 5", 12"

11. A 2 ঘ., B 3 ঘ.

12. 9 সে.

13. 20

14. 76

15. বর্টার 6 মা.

16. 8"

17. 20', 13'

18. বর্টার 4 মা. 19. 19, 20 20. 7" 21. 8 মি., 12 মি. 22. 324.

## Exercise 12

1. (a)  $x=3, y=1$  (b)  $x=5, y=1$  (c)  $x=-1$  (d)  $x=1$  (e)  $x=7$

21. (5, 12), (12, 5)

22. (1, 1)

23. (0, 0), (4, 4)

25. (-2, 1), (4, 4)

26. 1'4

27. (3, 4), (4, 3)

28. 2'3

29. (5, 2)

30. 1

31. -1, 2

32. 1, 1'5

34. 3, -1

35. 6'7 একক (প্রায়)

36. 1, 3

37. 2'4, -'4

38. 7'5 একক

39. 1

40. 3, '5

41. -1, -2

43. 2, 4

44. (0, 0), (1, 1)

45. 4, -1

46. (i) 2 ; (ii) -1 ; (iii) '4, -2'4

52. (-3, 4)

53. 5, - $\frac{1}{2}$

55. 10 $\frac{1}{2}$  আনা, 14টি ;

56. অপরাহ্ন 5 টার, 35 মা. দূরে.

57. (1) P যাত্রা করার 50 মিনিট পরে, হাওড়া হইতে 25 মা. দূরে.

(2) 6 মাইল।

58. A যাত্রা করার 4 ঘ. 12 মি. পরে, যাত্রাশ্রম

হইতে 13'2 মা. দূরে ;

59. 9 টা বাজিরা 9 মিনিটে, হাওড়া হইতে 26 মা.

দূরে ;

60. 80 মাইল ;

61. 2'4 বর্টা.

62. (a). 5 টা 24 মিনিটে,

P হইতে 24 মাইল দূরে

(j) 4 মাইল

63. (i) 80 টাকা,

(ii) মাসিক 240 টাকা ;

64. 24,500 জন ;

65. 3'4 কি.গ্রা., 15'4 পাউণ্ড

67.  $x=4, y=5$ , অথবা,  $x=-1'6, y=-6'2$

68. 4, -8

69.  $x=12, y=2$  ;  $x=6, y=-6$ .

70.  $x=3, y=8$  ;  $x=8, y=3$  ;  $x=-3, y=-8$  ;  $x=-8, y=-3$

71.  $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ .

# ত্রিকোণমিতি

## Exercise 1

1. (i)  $3^{\circ} 40' 14''$  (ii)  $8^{\circ} 27' 30''$  (iii)  $21^{\circ} 36'$
2.  $4^{\circ} 62' 35''$  (ii)  $7^{\circ} 3' 33' 8''$  (iii)  $10^{\circ} 72' 5'$  (iv)  $3^{\circ} 24' 60''$
3. (i)  $\frac{1}{2}$  (ii)  $\frac{2}{3}$  (iii)  $1'35$  (iv)  $4\frac{1}{3}\frac{2}{7}\frac{3}{8}$  (v)  $503524$  (vi)  $\frac{2}{3}$  (vii)  $20$
4. (i)  $33^{\circ} 56' 66' 6''$  (ii)  $70^{\circ} 27' 50''$  (iii)  $66^{\circ} 79' 16' 6''$  (iv)  $120^{\circ}$   
(v)  $16^{\circ} 66' 66' 6''$
5. (i)  $36^{\circ} 19' 1' 776''$  (ii)  $54^{\circ} 8' 1''$  (iii)  $36^{\circ} 24' 29' 664''$   
(iv)  $114^{\circ} 32' 43' 63''$  (v)  $100'$  (vi)  $120^{\circ}$
6. (i)  $\frac{\pi}{6}$  (ii)  $\frac{151\pi}{360}$  (iii)  $\frac{3407\pi}{13500}$  (iv)  $\frac{3\pi}{5}$  (v)  $\frac{44\pi}{125}$   
(vi)  $1'626286\pi$  7.  $35^{\circ}, 19^{\circ}; \frac{25}{9}g, \frac{12}{9}g$
8.  $110^{\circ}5', 29^{\circ}5', \frac{221\pi^{\circ}}{360}, \frac{59\pi^{\circ}}{360}$
9. (i)  $100^{\circ}, 60^{\circ}$  (ii)  $250^{\circ}, 150^{\circ}$  (iii)  $30\pi^{\circ}, 18\pi^{\circ}$  10.  $66'6''$
11.  $\frac{4\pi}{9}, \frac{2}{5}\pi$  12.  $22\frac{1}{2}^{\circ}, 67\frac{1}{2}^{\circ}$  13.  $\frac{\pi}{4}$  14.  $63^{\circ}$
15.  $66^{\circ}40', 21^{\circ}36'$  16.  $\frac{\pi}{3}$  17.  $96^{\circ}$  18.  $\frac{(n-2)\pi}{n}$
19.  $\left(\frac{90}{\pi} + \frac{1}{2}\right)^{\circ}, \left(\frac{90}{\pi} - \frac{1}{2}\right)^{\circ}$  অথবা,  $\frac{641^{\circ}}{22}, \frac{619^{\circ}}{22}$
21.  $54^{\circ}, 81^{\circ}, 108^{\circ}, 135^{\circ}, 162^{\circ}; \frac{3\pi}{10}, \frac{9\pi}{20}, \frac{3\pi}{5}, \frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{10}$
22. 28 ন. 23.  $90^{\circ}$  24.  $6\frac{2}{3}\frac{2}{3}$  ই. 25.  $3\frac{1}{2}$  ই.
26. 2500 ফু 27. 110 ই. 28. 856720 বাইল (আসন্ন)
29.  $55\frac{1}{2}$  ফু. 30.  $\frac{5}{8}\frac{5}{7}$  বাইল 31.  $1^{\circ}25' 57''$  (প্রায়)
32. 1ম। 287 ন. 3ফু. (আসন্ন) 33.  $\frac{4\pi}{35}, \frac{9\pi}{35}, \frac{14\pi}{35}, \frac{19\pi}{35}, \frac{24\pi}{35}$
34.  $123'899$  বর্গফুট 35. 200 ফু. 36.  $94\frac{1}{2}''$  (প্রায়)
37. 5টা 12 মিনিট, বা 42 $\frac{1}{11}$  মিনিট 38. 42, 14
39.  $\frac{2\pi}{9}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{9}$  41. 1টা 36 মিনিট 42.  $7'9'54''$
43. 5 : 4 44.  $\frac{4\pi^{\circ}}{5}$

## Exercise 2

33. 2      34. 0      35. 1      36. 0      37. 0      38. 0.

## Exercise 3

$$1. \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}, \tan \theta = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}{\cos \theta}, \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}.$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}, \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad 2. \frac{3}{4}, \frac{4}{3} \quad 3. \frac{1}{5}, \frac{5}{4}$$

$$4. \frac{3}{4}, \frac{4}{3} \quad 5. \frac{3}{4} \quad 6. \frac{11}{10}, \frac{10}{11} \quad 13. \sin = \frac{4}{5}, \cos = \frac{3}{5}, \cot = \frac{4}{3},$$

$$\sec = \frac{5}{3}, \operatorname{cosec} = \frac{5}{4} \quad 14. \frac{4}{5} \quad 15. \frac{1}{7} \quad 16. \frac{1}{13}.$$

## Exercise 4

$$2. \frac{1}{2}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \quad 3. 9 \quad 4. 1 \quad 5. 1\frac{1}{4}$$

$$6. 9\frac{3}{8} \quad 11. 0 \quad 12. \frac{5\sqrt{3}}{6} \quad 13. 1.$$

## Exercise 5

$$1. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad 2. x^2 + y^2 = b^2 \quad 3. xy = a^2$$

$$4. ac = b^2 \quad 5. xy = ab.$$

## Exercise 6

$$1. 30^\circ \quad 2. 60^\circ \quad 3. \theta = 30^\circ \text{ বা } 60^\circ \quad 4. 0^\circ \text{ বা } 90^\circ$$

$$5. 60^\circ \quad 6. 45^\circ \quad 7. 45^\circ \quad 8. 6^\circ$$

$$9. 5^\circ \quad 10. \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 11. x=3, \theta=30^\circ$$

$$12. p=2, \theta=60^\circ \quad 13. -\frac{5}{3} \quad 15. 60^\circ \quad 16. 0^\circ, 60^\circ \quad 17. 30^\circ.$$

## Exercise 7

$$1. 173'2 \text{ ফু. বা } 100\sqrt{3} \text{ ফুট} \quad 2. 150\sqrt{3} \text{ গজ} \quad 3. 103'92 \text{ ফু.}$$

$$4. 10'392 \text{ ফু.} \quad 5. 9 \text{ ফু.} \quad 6. 15\sqrt{2} \text{ ফু.} \quad 7. 30^\circ$$

$$8. 68'3 \text{ ফু.} \quad 9. 17'32 \text{ ফু.} \quad 10. 15\sqrt{3} \text{ ফু.}$$

$$11. 141'96 \text{ ফু.} \quad 12. 94'64 \text{ ফু.} \quad 13. 165'36 \text{ ফু. (প্রায়)} \quad 14. 40 \text{ ফু.}$$

$$15. 37'32 \dots \text{ফু.} \quad 16. 40\sqrt{3} \text{ ফু.} \quad 17. 63'4 \text{ ফু. (প্রায়)} \quad 18. 30^\circ$$

$$19. 51'96 \text{ ফু., } 30 \text{ ফু.} \quad 20. 200 \text{ ফু.} \quad 21. '866 \text{ ম। বা } '433 \text{ ম।}$$

$$22. 173'2 \text{ গজ} \quad 23. উচ্চতা = 17'32 \text{ ফু. একটি ব্লক্ট হইতে 10 ফুট দূরে}$$

$$24. 173'2 \text{ গজ} \quad 25. 81'96 \text{ ফুট (প্রায়)} \quad 26. 30 \text{ ফুট।}$$

## পরিশিষ্ট

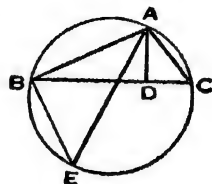
### কতিপয় অতিরিক্ত উপপাদ্য

#### ব্রহ্মগুপ্তের উপপাদ্য [ Brahmagupta's Theorem ]

1. If from the vertex of a triangle a perpendicular is drawn to the base, the rectangle contained by the other two sides of the triangle is equal to the rectangle contained by the perpendicular and the diameter of the circum-circle.

[ C. U. '39 Suppl. ]

মনে কব, ABC ত্রিভুজে BCর উপর AD লম্ব এবং AE ঐ ত্রিভুজের পরিবৃত্তের একটি ব্যাস। প্রমাণ করিতে হইবে যে,  $AB \cdot AC = AD \cdot AE$ . BE যোগ কর।



প্রমাণ :  $\triangle ABE$  ও  $\triangle ADC$ র  $\angle E = \angle C$  (একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ বলিয়া), এবং অব্যবৃক্ত  $\angle ABE = \text{এক সমকোণ} = \angle ADC$ .

$\therefore \triangle ABE$  ও  $\triangle ADC$  সদৃশকোণী।

চিত্র নং 1

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC}, \quad AB \cdot AC = AD \cdot AE.$$

অনুসিদ্ধান্ত : If  $a, b, c$  denote the sides of a triangle and  $S$  its area, then  $R$ , the circum-radius of the triangle is given by  $R = \frac{abc}{4S}$ .

[ C. U. '39 Suppl. ]

$\triangle ABC$ র ক্ষেত্রফল  $S = \frac{1}{2} BC \cdot AD$ ,  $\therefore 4S = 2BC \cdot AD = 2a \cdot AD$ .

উপরের উপপাদ্য অনুসারে  $AE \cdot AD = AB \cdot AC$ , অর্থাৎ  $2R \cdot AD = c \cdot b$ ,

$$\therefore 2R = \frac{bc}{AD} = \frac{abc}{a \cdot AD}, \quad \therefore R = \frac{abc}{2a \cdot AD} = \frac{abc}{4S}.$$



### টলেমির উপপাত্ত [ Ptolemy's Theorem ]

2. The rectangle contained by the diagonals of a cyclic quadrilateral is equal to the sum of the two rectangles contained by the pairs of opposite sides.

[ C. U. '36, '38, '43, '44 ; D. B. '31, '44, '51 G. U. '49, '51 ]

ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের AC ও BD দুইটি কর্ণ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

অঙ্কন :  $\angle BAC$ র সমান  $\angle DAP$  আঁক, AP যেন BD-কে P বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ :  $\because \angle BAC = \angle PAD, \therefore$  উভয়পক্ষে

$\angle PAC$  যোগ করিলে  $\angle BAP = \angle CAD$  হইল।

$\angle ABD = \angle ACD$  ( একই বৃত্তাংশস্থ বলিয়া ),  $\therefore \triangle ABP$  ও  $\triangle ACD$

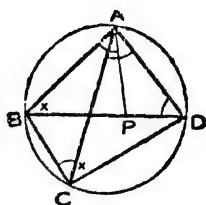
সদৃশকোণী,  $\therefore \frac{BP}{CD} = \frac{AB}{AC}, \therefore BP \cdot AC = CD \cdot AB \dots (1)$

আবার,  $\triangle APD$  ও  $\triangle ABC$ -র  $\angle ADP = \angle ACB$  ( একই বৃত্তাংশস্থ বলিয়া ), এবং  $\angle PAD = \angle BAC$  ( অঙ্কন ),  $\therefore$  ত্রিভুজের সদৃশকোণী।

$$\therefore \frac{PD}{BC} = \frac{AD}{AC}, \therefore PD \cdot AC = BC \cdot AD \dots (2);$$

এক্ষণে (1) ও (2) যোগ করিলে  $BP \cdot AC + PD \cdot AC = AB \cdot CD + BC \cdot AD$  ;  
কিন্তু  $BP \cdot AC + PD \cdot AC = AC(BP + PD) = AC \cdot BD$ ,

$$\therefore AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$



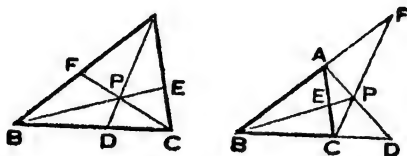
চিত্র নং 2

### সিভার উপপাত্ত [ Ceva's Theorem ]

3. If three straight lines drawn from the vertices of a triangle to meet the opposite sides are concurrent, then the product of the three ratios of the segments into which they divide the sides is equal to 1.

Or, [ If three concurrent straight lines are drawn from the angular points of a triangle to meet the opposite sides or these sides produced, the product of the three alternate segments taken in order is equal to the product of the other three segments. ]

$\triangle ABC$ র A, B ও C শীর্ষবিন্দুগুলি হইতে তিনটি সমবিন্দু সরলরেখা যথাক্রমে BC, AC ও AB-কে D, E ও F বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং পরস্পর P বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে,  $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1$ .



চিত্র নং 3

প্রমাণ:  $\because \triangle ABP$  ও  $\triangle BPC$  একই ভূমি BPর উপর অবস্থিত,

$$\therefore \frac{\triangle ABP}{\triangle BPC} = \frac{AE}{CE} \quad \text{অনুরূপে} \quad \frac{\triangle BPC}{\triangle APC} = \frac{BF}{AF} \quad \text{এবং} \quad \frac{\triangle APC}{\triangle ABP} = \frac{CD}{BD}$$

একণে এই অরূপাত তিনটি গুণ করিয়া হয়,

$$\frac{AE}{CE} \cdot \frac{BF}{AF} \cdot \frac{CD}{BD} = \frac{\triangle ABP}{\triangle BPC} \cdot \frac{\triangle BPC}{\triangle APC} \cdot \frac{\triangle APC}{\triangle ABP} = 1. \quad \therefore \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1.$$

[ জটব্য: (1) C U. '40-তে প্রদত্ত প্রশ্নের উত্তরে আর একটু এই লিখিতে হইবে,  $\therefore BD \cdot CE \cdot AF = DC \cdot AE \cdot BF$ . ]

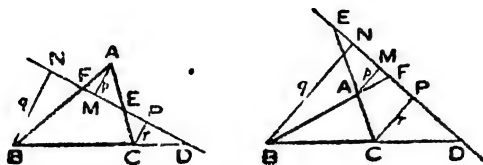
### মেনেলসের উপপাত্ত [ Menelaus' Theorem ]

4. If a transversal cuts the sides of a triangle, then the product of the three ratios of the segments into which it divides the sides is equal to 1.

Or, [If a straight line cuts the sides or the sides produced of a triangle, the product of three alternate segments taken in order is equal to the product of the remaining segments. ]

মনে কর, DEF ভেদকটি  $\triangle ABC$ র BC, CA ও BA বাহুকে যথাক্রমে D, E ও F বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1.$$



চিত্র নং ৪

অঙ্কন : ভেদকটির উপর AM, BN ও CP লম্ব টান। মনে কর,  $AM = p$ ,  $BN = q$  ও  $CP = r$  দৈর্ঘ্য একক।

প্রমাণ :  $\therefore$  CP ও BN, DF-এর উপর লম্ব,  $\therefore CP \parallel BN$ ; সুতরাং  $\triangle BND$  ও  $\triangle CPD$  সদৃশকোণী,  $\frac{BD}{CD} = \frac{q}{r}$ .

অনুরূপে  $\triangle CPE$  ও  $\triangle AME$  সদৃশকোণী,  $\frac{CE}{AE} = \frac{r}{p}$ ,

এবং  $\triangle AMF$  ও  $\triangle BNF$  সদৃশকোণী,  $\therefore \frac{AF}{BF} = \frac{p}{q}$ .

এই অনুপাতগুলির গুণফল হইতে পাই,  $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = \frac{q}{r} \cdot \frac{r}{p} \cdot \frac{p}{q} = 1.$

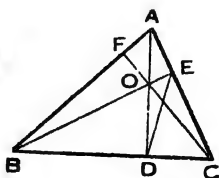
5. Perpendiculars drawn from the vertices of a triangle to the opposite sides are concurrent.

[ C. U. '30, '37 ; D. B. '26, '49, '50 ]

Or, [ The altitudes of a triangle are concurrent. ]

মনে কর, ABC ত্রিভুজে AD ও BE যথাক্রমে BC ও AC বাহুর উপর লম্ব এবং উহারা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। CO যোগ করিয়া বর্ধিত কর, উহা যেন ABকে F বিন্দুতে ছেদ করিবে। প্রমাণ করিতে হইবে যে  $CF \perp AB$ .

প্রমাণ : DE যোগ কর।  $\therefore \angle BEA$  ও  $\angle BDA$  সমকোণ,  $\therefore ABDE$  বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।



চিত্র নং 5

$\therefore \angle BAD = \angle BED = \angle OED$  (একই বৃত্তাংশস্থ বলিয়া)।

আবার,  $\angle OEC$  ও  $\angle ODC$  সমকোণ বলিয়া  $ODCE$  বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ,

$\therefore \angle OED = \angle OCD$ .  $\therefore \angle OAF = \angle OED = \angle OCD$ .

এক্ষণে,  $\angle COD + \angle OCD = 1$  সমকোণ ( $\because \angle ODC$  সমকোণ), এবং  $\angle COD = \angle AOF$ .  $\therefore \angle OAF + \angle AOF = \angle COD + \angle OCD = 1$  সমকোণ,

$\therefore \angle AFO$  এক সমকোণ।  $\therefore CF \perp AB$ .

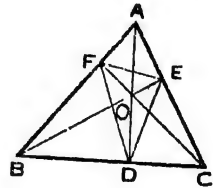
অতএব লম্বত্রয় সমবিন্দু হইল।

[**জ্যেষ্ঠ্য :** এই লম্বত্রয় যে বিন্দুতে ছেদ করে তাহাকে ত্রিভুজের লম্ববিন্দু (Ortho-centre) বলে এবং উহাকে সাধারণত  $O$  দ্বারা সূচিত করা হয়।]

6. In an acute-angled triangle, the perpendiculars drawn from the vertices to the opposite sides bisect the angles of the pedal triangle. [C. U. '49]

[**জ্যেষ্ঠ্য :** কোন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি হইতে বিপরীত বাহুগুলির উপর অঙ্কিত লম্বত্রয়ের পাদবিন্দু তিনটি যোগ করিয়া যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় তাকে পাদ-ত্রিভুজ (Pedal triangle) বলে।]

$AD, BE$  ও  $CF$  লম্বত্রয়  $O$  বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে,  $DEF$  পাদ-ত্রিভুজে  $\angle D, \angle E$  ও  $\angle F$  যথাক্রমে  $AD, BE$  ও  $CF$  দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে।



চিত্র নং 6

**প্রমাণ :**  $\because \angle OFD$  ও  $\angle ODB$  সমকোণ,

$\therefore BDOF$  বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ,  $\therefore \angle ODF = \angle OBF$

(একই বৃত্তাংশস্থ বলিয়া)। আবার,  $\because BCEF$

বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ ( $\angle CFB$  ও  $\angle BEC$  সমকোণ বলিয়া),

$\therefore \angle EBF = \angle FCE$ , অর্থাৎ  $\angle OBF = \angle OCF$

$\angle ODF = \angle OCE$ .

এক্ষণে,  $\because ODCE$  বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ ( $\because \angle ODC$  ও  $\angle OEC$  সমকোণ)

$\therefore \angle OCE = \angle ODE$  ( $\because$  একই বৃত্তাংশস্থ),  $\therefore \angle ODF = \angle ODE$ ,

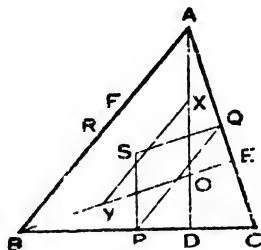
$\therefore \angle FDE$ ,  $AD$  দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত। অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে,

$BE$  দ্বারা  $\angle FED$  এবং  $CF$  দ্বারা  $\angle DFE$  সমদ্বিখণ্ডিত।

7. The distance of the circum-centre from any side

of a triangle is half the distance of the ortho-centre from the opposite vertex. [ cf. C. U. '10 ]

মনে কর,  $\triangle ABC$  ত্রিভুজের  $AD$ ,  $BE$  ও  $CF$  লম্বত্রয়  $O$  বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে, সুতরাং  $O$  লম্ববিন্দু হইল। মনে কর,  $\triangle ABC$ র পরিকেন্দ্র  $S$  এবং  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  যথাক্রমে  $BC$ ,  $AC$  ও  $AB$ র মধ্যবিন্দু, সুতরাং  $SP$ ,  $SQ$ ,  $SR$  যথাক্রমে  $BC$ ,  $AC$  ও  $AB$ র উপর লম্ব হইল। প্রমাণ করিতে হইবে যে,  $SP = \frac{1}{2}AO$ ,  $SQ = \frac{1}{2}BO$  এবং  $SR = \frac{1}{2}CO$ ।  $AO$ র মধ্যবিন্দু  $X$  এবং  $BO$ র মধ্যবিন্দু  $Y$  লও।  $XY$  ও  $PQ$  যোগ কর।



চিত্র নং ৭

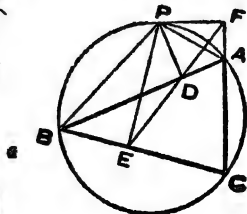
প্রমাণ :  $\triangle AOB$ র  $AO$ র মধ্যবিন্দু  $X$  এবং  $BO$ র মধ্যবিন্দু  $Y$ ,  $\therefore XY$ ,  $AB$ র সমান্তরাল ও অর্ধেক। আবার  $CA$ র মধ্যবিন্দু  $Q$  ও  $BC$ র মধ্যবিন্দু  $P$ ,  $\therefore PQ$ ,  $AB$ র সমান্তরাল ও অর্ধেক।  $\therefore PQ$  ও  $XY$  সমান ও সমান্তরাল। আবার,  $SP \parallel AD$  বা  $XO$  (উভয়ে  $BC$ এর উপর লম্ব বলিয়া); অনুরূপে  $SQ \parallel BE$  বা  $YO$ । অতএব  $SP$  ও  $PQ$ এর মধ্যবর্তী  $\angle SPQ = \angle XOY$  ও  $YX$ -এর মধ্যবর্তী  $\angle YXO$ , এবং অনুরূপে  $\angle PSQ = \angle XOY$ ।

$\therefore \triangle PSQ$  ও  $\triangle XOY$  সর্বসম।  $\therefore SP = XO = \frac{1}{2}AO$ ।

অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে  $SQ = \frac{1}{2}BO$  এবং  $SR = \frac{1}{2}CO$ ।

8. The feet of the 3 perpendiculars drawn to the three sides of a triangle from any point of its circum-circle are collinear. [ C. U. '36, '39, '41, '50; G. U. '50, '52 ]

$\triangle ABC$ র পরিবৃত্তের পরিধিস্থ যে কোন বিন্দু  $P$  হইতে  $AB$ ,  $BC$  ও  $CA$ র উপর যথাক্রমে  $PD$ ,  $PE$  ও  $PF$  লম্ব টানা হইল। প্রমাণ করিতে হইবে যে,  $D$ ,  $E$ ,  $F$  বিন্দুত্রয় এক সরলরেখায় অবস্থিত।  $DE$ ,  $FD$ ,  $PA$  ও  $PB$  যোগ কর।



চিত্র নং ৮

প্রমাণ :  $\therefore \angle PDA$  ও  $\angle PFA$  সমকোণ।

$\therefore PDAF$  বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

$\therefore \angle PDF = \angle PAF$  (একই বৃত্তাংশস্থ)

$\angle PBC$  ( $\therefore APBC$  বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ)।

আবার,  $\therefore \angle PDB$  ও  $\angle PEB$  সমকোণ,  $\therefore$  PDEB বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ,  
 $\therefore \angle PBE + \angle PDE = 2$  সমকোণ। কিন্তু  $\angle PDF = \angle PBE$  (প্রমাণিত)  
 $\therefore \angle PDF + \angle PDE = 2$  সমকোণ।  $\therefore$  DE ও DF একই সরলরেখা  
 অর্থাৎ D, E, F বিন্দুত্রয় এক সরলরেখায় অবস্থিত।

[উদ্ভেদ্য : এই লম্বত্রয়ের পাদবিন্দু তিনটি যে সরলরেখায় অবস্থিত  
 তাহাকে পাদরেখা (Pedal line বা Simson's line) বলে।]

9. In any triangle the middle points of the sides, the feet of the perpendiculars from the vertices to the opposite sides, and the mid points of the joins of the ortho-centre, to the vertices are concyclic.

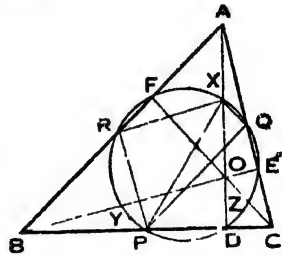
[C. U. '26, '37, '40, '44, '50; W. B. S. F. '52; G. U. '49, '52]

$\triangle ABC$ র বাহুগুলির উপর AD, BE ও CF লম্বত্রয়ের পাদবিন্দু D, E, F;  
 O লম্ব-বিন্দু; P, Q, R যথাক্রমে BC, AC ও ABর মধ্যবিন্দু; এবং X, Y, Z  
 যথাক্রমে AO, BO, COর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ করিতে হইবে যে D, E, F, P,  
 Q, R, X, Y, Z এই বিন্দুগুলি একই বৃত্তের পরিধিস্থ।

PX, RX, RP, QX, PQ যোগ কর।

প্রমাণ :  $\therefore \triangle ABO$ র AB বাহুর  
 মধ্যবিন্দু R এবং AO বাহুর মধ্যবিন্দু X,  
 $\therefore RX \parallel BO$  বা  $BE$ .  $\therefore R$  ও P যথাক্রমে  
 AB ও BCর মধ্যবিন্দু,  $\therefore RP \parallel AC$ .

এক্ষে  $\angle PRX$  এর বাহুদ্বয় যথাক্রমে  
 $\angle AEB$ র বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল এবং কোণ দুইটি  
 পরস্পর বিপরীত দিকে অবস্থিত,



চিত্র নং 9

$\therefore \angle PRX + \angle AEB = 2$  সমকোণ, কিন্তু  $\angle AEB$  এক সমকোণ,  
 $\therefore \angle PRX =$  এক সমকোণ। এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে  
 $\angle PQX =$  এক সমকোণ। অতএব, R, Q, D বিন্দুতে PX-এর সম্মুখকোণ এক  
 সমকোণ।  $\therefore$  PX-কে ব্যাস করিয়া অঙ্কিত বৃত্ত P, X, R, D, Q বিন্দুগুলি  
 দিয়া যাইবে। অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে, ঐ বৃত্তটি E, F, Y, Z বিন্দু  
 দিয়াও যাইবে। অতএব D, E, F, P, Q, R, X, Y, Z বিন্দুগুলি একই বৃত্তস্থ।

[উদ্ভেদ্য : (1) ত্রিভুজের ঐ বিন্দু নয়টি দিয়া যে বৃত্ত অঙ্কিত হয় তাহাকে  
 ত্রিভুজটির নব-বিন্দু বৃত্ত (Nine-point Circle) বলে। (2) ঐ বৃত্তের  
 কেন্দ্রকে নব-বিন্দু কেন্দ্র (Nine-point Centre) বলে। (3) ত্রিভুজের

লম্ববিন্দু হইতে কোন শীর্ষবিন্দু পর্যন্ত রেখার মধ্যবিন্দু ও বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দু সংযোজক সরলরেখাকে ব্যাস করিয়া অঙ্কিত বৃত্তই এই নব-বিন্দু-বৃত্ত।  
(4) এই 9টি বিন্দুর মধ্যে যে কোন 6টির মধ্য দিয়া বৃত্ত অঙ্কন করিতে বলিলে নব-বিন্দু বৃত্ত আঁকিতে হইবে।]

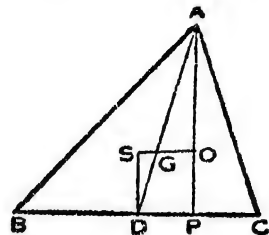
### বিবিধ সমাধান

উদা. 1. Prove that the circum-centre, the centroid and the ortho-centre of a triangle are collinear. [C. U. '27, '51]

মনে কর,  $\triangle ABC$ র পরিকেন্দ্র S, লম্ববিন্দু O এবং BCর মধ্যবিন্দু D. SD, SO এবং AD যোগ কর। AD মধ্যমা যেন SOকে G বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ করিতে হইবে G বিন্দু ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র (centroid)।

প্রমাণঃ  $\therefore$  SD ও AP উভয়েই BCর উপর লম্ব,  $\therefore$  SD  $\parallel$  AO.

$\therefore \angle GSD =$  একান্তর  $\angle AOG$ , এবং  $\angle SGD =$  বিপ্রতীপ  $\angle AGO$ .  $\therefore \triangle GSD$  ও  $\triangle GOA$  সদৃশকোণী।  $\therefore \frac{GD}{AG} = \frac{SD}{AO} = \frac{1}{2}$



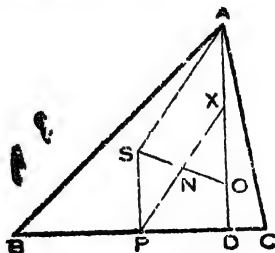
চিত্র নং 10

( $\therefore$  কোন বাহু হইতে পরিকেন্দ্রের দূরত্ব লম্ববিন্দু হইতে বিপরীত শীর্ষবিন্দুর দূরত্বের অর্ধেক),  $\therefore GD = \frac{1}{2}AG$ , সুতরাং AD মধ্যমা G বিন্দুতে সমত্রিখণ্ডিত হইয়াছে।  $\therefore$  G বিন্দু ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র। অতএব, ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র S, লম্ববিন্দু O এবং ভরকেন্দ্র G একই সরলরেখায় অবস্থিত।

উদা. 2. The centre of the nine-point circle is the middle point of the straight line which joins the ortho-centre to the circum-centre.

মনে কর,  $\triangle ABC$ র পরিকেন্দ্র S এবং লম্ববিন্দু O. প্রমাণ করিতে হইবে যে,  $\triangle ABC$ র নববিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র SO সরল-রেখার মধ্যবিন্দু।

অঙ্কনঃ SO যোগ কর। BCর মধ্যবিন্দু P এবং AOর মধ্যবিন্দু X লও। PX যোগ কর, উহা যেন SOকে N বিন্দুতে ছেদ



চিত্র নং 11

করিল। SP যোগ কর, AOকে বর্ধিত করিয়া BCকে D বিন্দুতে ছেদ কর।

প্রমাণ :  $\because$  S পরিকেন্দ্র ও BCব মধ্যবিন্দু P,  $\therefore SP \perp BC$ .  $\because SP \perp BC$  ও  $AD \perp BC$ ,  $\therefore SP \parallel AD$ . আবার  $SP = \frac{1}{2}AO = OX$ . এক্ষেপে  $\triangle SPN$  ও  $\triangle XON$ এর  $SP = OX$ ,  $\angle PSN =$  একান্তর  $\angle XON$  এবং  $\angle SNP =$  বিপ্রতীপ  $\angle XNO$ .  $\therefore SN = ON$  এবং  $PN = NX$ , অর্থাৎ N বিন্দু SO এবং PXএর মধ্যবিন্দু।  $\therefore$  PX নব-বিন্দু বৃত্তের ব্যাস,  $\therefore$  উহার মধ্যবিন্দু N নব-বিন্দু-বৃত্তের কেন্দ্র। অতএব নব-বিন্দু-বৃত্তের কেন্দ্র SOর মধ্যবিন্দু।

উদা. 3. Prove that the radius of the nine-point circle is half the radius of the circum-circle. [C. U. '40 ; G. U. '50]

[ Hints : ( চিত্র নং 11 দেখ। )  $SP = \frac{1}{2}AO = AX$  এবং  $SP \parallel AD$  বা  $AX$ ,  $\therefore SP$  ও  $AX$  সমান ও সমান্তরাল।  $\therefore$  ASPX একটি সামান্তরিক হইল।  $\therefore PX = SA$ ,  $\therefore \frac{1}{2}PX = \frac{1}{2}SA$ . এখানে PX নব-বিন্দু-বৃত্তের ব্যাস এবং SA পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ।  $\therefore$  নব-বিন্দু-বৃত্তের ব্যাসার্ধ পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধের অর্ধেক। ]

উদা. 4. Prove that the circum-centre, the ortho-centre, the centroid and the nine-point centre of a triangle are collinear. [C. U. '34]

[ Hints : চিত্র নং 10 আঁকিয়া উদা. 1-এর মত প্রথমে প্রমাণ কর যে, S, G, O অর্থাৎ পরিকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু এক সরলরেখায় অবস্থিত। তারপর AOর মধ্যবিন্দু X-এর সহিত D যোগ কর, XD যেন SOকে N বিন্দুতে ছেদ করিল এখন উদা. 2-এর সাহায্যে প্রমাণ কর যে N বিন্দু নববিন্দুবৃত্তের কেন্দ্র। উহা SOর উপর অবস্থিত বলিয়া S, O, G এবং N একই সরলরেখায় অবস্থিত হইল। ]

### সঞ্চারণপথ

উদা. 1. Given the base and the vertical angle of a triangle, find the locus of its ortho-centre.

[ চিত্র আঁকিয়া লও মনে কর,  $\triangle ABC$ র ভূমি BC নির্দিষ্ট এবং শীর্ষকোণ  $\angle A$  একটি নির্দিষ্ট  $\angle X$ -এর সমান। B ও C বিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর যথাক্রমে BD ও CE লম্ব টান, উহারা যেন O বিন্দুতে ছেদ করিল। এই লম্ববিন্দু O-এর সঞ্চারণপথ নির্ণয় করিতে হইবে।



$\therefore$  ADOE চতুর্ভুজের  $\angle D$  ও  $\angle E$  প্রত্যেকে সমকোণ  
 $\therefore \angle DOE + \angle A = 2$  সমকোণ। কিন্তু  $\angle A$ -র পরিমাণ নির্দিষ্ট বা ধ্রুবক,  
 $\therefore \angle BOC = \angle DOE =$  ধ্রুবক। অতএব, লম্ববিন্দু O-তে BO ভূমির সম্মুখ-  
 কোণ ধ্রুবক হওয়ায় B, O, C দিয়া অঙ্কিত বৃত্তের (অর্থাৎ BCর উপর  
 $\angle BOC$  ধারণক্ষম বৃত্তাংশের) BOC চাপই O বিন্দুর উদ্দিষ্ট সঞ্চারপথ হইল।

উদা. 2. Given the base and the vertical angle of a triangle, find the locus of its in-centre. [C. U. '19]

মনে কর,  $\triangle ABC$ র ভূমি BC নির্দিষ্ট এবং শিরঃকোণ-A একটি নির্দিষ্ট  
 $\angle X$  কোণের সমান।  $\angle B$  ও  $\angle C$ -এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় যেন I-বিন্দুতে ছেদ  
 করিল। এই অন্তঃকেন্দ্র I-এর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

$\triangle BIC$ র  $\angle BIC + \angle IBC + \angle ICB = 180^\circ$ , অর্থাৎ  $\angle BIC + \frac{1}{2} \angle B$   
 $+ \frac{1}{2} \angle C = 180^\circ \dots\dots(1)$ .  $\triangle ABC$ র  $\frac{1}{2} \angle A + \frac{1}{2} \angle B + \frac{1}{2} \angle C = 90^\circ \dots(2)$ .  
 এখন (1) হইতে (2) বিয়োগ করিলে  $\angle BIC - \frac{1}{2} \angle A = 90^\circ$ .

$\therefore \angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle A = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle X =$  ধ্রুবক। সুতরাং BC নির্দিষ্ট  
 ভূমির উপর I-বিন্দুতে সম্মুখ-কোণ ধ্রুবক হওয়ায় B, I ও C বিন্দুগামী বৃত্তের  
 (বা BCর উপর  $\angle BIC$  ধারণক্ষম বৃত্তাংশের) BIC চাপ অন্তঃকেন্দ্র I-এর  
 সঞ্চারপথ হইল।

উদা. 3. Given the base and the vertical angle of a triangle, find the locus of its centroid.

$\triangle ABC$ র ভূমি BC ও শিরঃকোণ A নির্দিষ্ট,  
 BE ও CF মধ্যমাংশ G বিন্দুতে ছেদ করিল। G  
 ভরকেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

GP  $\parallel$  AB, GK  $\parallel$  AC টান, উহারা BCকে  
 যথাক্রমে P ও K বিন্দুতে ছেদ করিল।

$\therefore GP \parallel AB, \therefore \angle GPK = \angle ABC$ .

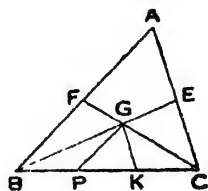
চিত্র নং 12

$\therefore GK \parallel AC, \therefore \angle GKP = \angle ACB. \therefore \angle PGK = \angle A =$  ধ্রুবক।

আবার,  $\therefore$  ত্রিভুজের মধ্যমাংশ সমদ্বিখণ্ডক বিন্দুতে ছেদ করে

$\therefore FG = \frac{1}{3}CF$  এবং  $EG = \frac{1}{3}BE$ . এক্ষেপে,  $\therefore GP \parallel FB, \therefore \frac{BP}{BC} = \frac{FG}{FC} = \frac{1}{3}$ .

$\therefore BP = \frac{1}{3}BC$ . অতরূপে  $KC = \frac{1}{3}BC. \therefore PK = \frac{1}{3}BC$ .



$\therefore BC$  নির্দিষ্ট,  $\therefore PK$  একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং উহার উপর  $G$  বিন্দুতে সম্মুখ-কোণ ধ্রুবক।

$\therefore PK$  রেখার উপর  $\angle A$  ধারণক্ষম বৃত্তাংশের  $PGK$  চাপই নির্ণয়ের সঙ্গীতপথ।

উদা. 4 Given the base and the vertical angle of a triangle, find the locus of the nine-point centre.

মনে কর,  $\triangle ABC$ র ভূমি  $BC$  নির্দিষ্ট এবং শিরঃকোণ- $BAC$  একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান। মনে কর  $N$  ত্রিভুজের নব-বিন্দু কেন্দ্র।

$N$ -এর সঙ্গীতপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

$BC$ র মধ্যবিন্দু  $D$  লও,  $DN$  যোগ কর। এক্ষণে  $DN$  নব-বিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ হইল।  $\therefore$  নব-বিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধের অর্ধেক হয়,  $\therefore DN$ ,  $\triangle ABC$ র পরিব্যাসার্ধের অর্ধেক। আবার,  $\triangle ABC$ র ভূমি ও শিরঃকোণ নির্দিষ্ট বলিয়া উহার পরিবৃত্ত নির্দিষ্ট, হুতরাং উহার পরিব্যাসার্ধও নির্দিষ্ট।  $\therefore DN$  ধ্রুবক।  $\therefore BC$  নির্দিষ্ট,  $\therefore$  উহার মধ্যবিন্দু  $D$  স্থিরবিন্দু। অতএব, এই স্থিরবিন্দু  $D$  হইতে গতিশীল  $N$  বিন্দুর দূরত্ব সর্বদা  $DN$ -এর সমান বা ধ্রুবক।  $\therefore D$ কে কেন্দ্র করিয়া  $DN$  ( বা পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধের অর্ধেক ) ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তের পরিধি  $N$  বিন্দুর সঙ্গীতপথ।

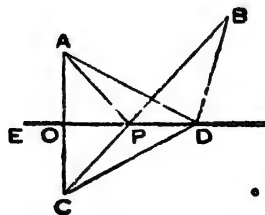
### চরম ও অবম [ Maxima and Minima ]

( গরিষ্ঠ ও লঘিষ্ঠ মান )

উদা. 1. A and B are two points on the same side of an unlimited straight line. Find a point P on the straight line such that the sum of the distances of the point from A and B is a minimum. [ C. U. ; D. B. '49, '50 ]

$EF$  অসীম সরলরেখার একই দিকে  $A$  ও  $B$  দুইটি বিন্দু।  $EF$ -এর উপর এমন একটি  $P$  বিন্দু নির্ণয় করিতে হইবে যেন  $A$  ও  $B$  হইতে তাহার দূরত্বের সমষ্টি লঘিষ্ঠ হয়।

অঙ্কন :  $AO \perp EF$  টান।  $AO$ -কে  $C$  পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন  $CO = AO$  হয়।  $CB$  যোগ কর, উহা  $EF$ -কে  $P$  বিন্দুতে ছেদ করিল।  $P$  নির্ণয়ের বিন্দু।



চিত্র নং 13

**প্রমাণ :** EF-এর উপর অত্র যে কোন বিন্দু D লও। AP, AD, CD, BD যোগ কর।  $\therefore P$  ও D বিন্দু ACর লম্বসম্বন্ধিত্বের উপর অবস্থিত,  $\therefore AP=CP$  এবং  $AC=CD$ . এখন  $AP+BP=CP+BP=BC$ , কিন্তু  $BC < BD+CD$ ,  $\therefore BC < BD+AD$ .  $\therefore AP+BP < AD+BD$ , ইহা D বিন্দুর EF-এর উপর যে কোন অবস্থানেই সত্য।

$\therefore P$  নির্ণেয় বিন্দু।

[**উল্লেখ্য :** AP ও BP, EF-এর সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করিলে  $AP+BP$  লম্বিষ্ঠ হয়।]

**উদা. 2.** Of all triangles standing on the same base and having the same vertical angle, prove that the isosceles triangle has (i) the greatest area, (ii) the greatest perimeter.

[ E. B. S. B. '50, C. U. '41 ]

মনে কর, AB ভূমির উপর ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ এবং ADB অত্র যে কোন ত্রিভুজ, উহাদের শিরঃকোণ  $\angle C$  ও  $\angle D$

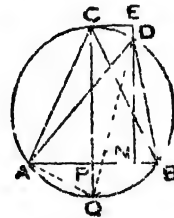
সমান। প্রমাণ করিতে হইবে যে

(i)  $\triangle ABC > \triangle ABD$ , এবং

(ii)  $\triangle ABC$ র পরিসীমা  $>$   $\triangle ABD$ র পরিসীমা।

**অঙ্কন :** (i)  $CP \perp AB$  এবং  $DN \perp AB$  টান।

**প্রমাণ :**  $\therefore$  ABর উপর C ও D বিন্দু কোণস্থল সমান,  $\therefore A, B, D, C$  একই বৃত্তস্থ। ABDC বৃত্তের C বিন্দুতে CE স্পর্শক টান।



চিত্র নং 14

NDর সহিত একত্রিয়া CEকে E বিন্দুতে ছেদ কর। এক্ষণে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে ভূমি ABর উপর CP লম্ব বলিয়া উহা ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে। সুতরাং CP বৃত্তের কেন্দ্র দিয়া গিয়াছে।  $\therefore CE$  স্পর্শক, CPর উপর লম্ব।  $\therefore CE \parallel AB$ .

আবার,  $CP \parallel EN$ ,  $\therefore CP=EN$ ,  $\therefore CP > DN$ . অতএব  $\triangle ABC$ র উচ্চতা  $\triangle ABD$ র উচ্চতা স্তূপেক্ষা অধিক বলিয়া  $\triangle ABC > \triangle ABD$ .

(ii) CPকে বর্ধিত করিয়া পরিধিকে Q বিন্দুতে ছেদ কর। AQ, BQ, DQ যোগ কর।

**প্রমাণ :**  $\therefore Q$  বিন্দু AB লম্বসম্বন্ধিত্বের উপর অবস্থিত,  $\therefore AQ=BQ$ , CQ কেন্দ্রগামী জ্যা বলিয়া উহা ব্যাস, সুতরাং  $CQ >$  অপর জ্যা DQ.

এক্ষণে, টলেমীর উপপাত্ত অনুসারে,  $BQ.AC + AQ.BC = AB.CQ$ , বা  $AQ(AC+BC) = AB.CQ$  ( $\therefore AQ=BQ$ )...(1).

আবার,  $BQ \cdot AD + AQ \cdot BD = DQ \cdot AB$  বা  $AQ(AD + BD) = DQ \cdot AB \dots (2)$

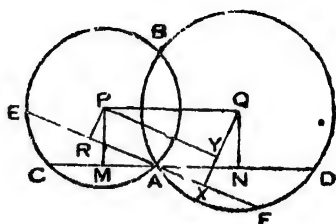
$\therefore (1) \text{ ও } (2) \text{ হইতে } \frac{AQ(AC + BC)}{AQ(AD + BD)} = \frac{AB \cdot CQ}{AB \cdot DQ}$ , বা  $\frac{AC + BC}{AD + BD} = \frac{CQ}{DQ}$ ,

কিন্তু  $CQ > DQ$ ,  $\therefore AC + BC > AD + BD$ .

$\therefore AC + BC + AB > AD + BD + AB$ .

**উদা. 3.** Of the straight lines through a point of intersection of two circles and terminated by the circumferences, the maximum is that which is parallel to the line of centres.

মনে কর, P ও Q কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তদ্বয় A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। A বিন্দু দিয়া  $CD \parallel PQ$  টান, উহা যেন পরিধিদ্বয়কে C ও D বিন্দুতে ছেদ করিল। A দিয়া অন্য যে কোন সরলরেখা EF টান, উহা যেন পরিধিদ্বয়কে E ও F বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ করিতে হইবে যে,  $CD > EF$ .



চিত্র নং 15

**অঙ্কন :** CDর উপর PM ও QN লম্ব টান, EFএর উপর PR ও QX লম্ব এবং  $PY \perp QX$  টান।

**প্রমাণ :**  $\because$  কেন্দ্র হইতে  $PM \perp AC$ ,  $\therefore AM = CM$ ,  $\therefore AM = \frac{1}{2}AC$ .  
 $\because QN \perp AD$ ,  $\therefore AN = \frac{1}{2}AD$ ,  $\therefore MN = \frac{1}{2}CD$ . অনুরূপে  $RX = \frac{1}{2}EF$ .  
 এক্ষণে,  $PQ = MN = \frac{1}{2}CD$  এবং  $PY = RX = \frac{1}{2}EF$ .  
 $\therefore \angle PYQ$  সমকোণ,  $\therefore PQ > PY$ ,  $\therefore \frac{1}{2}CD > \frac{1}{2}EF$ ,  $\therefore CD > EF$ .

**উদা. 4.** To find a point within a triangle such that the sum of its distances from the vertices is a minimum.

$\triangle ABC$ -র AB ও AC-র উপর  $120^\circ$  কোণ ধারণক্ষম দুইটি বৃত্তাংশ আঁক, উহারা যেন O বিন্দুতে ছেদ করিল। O উদ্দিষ্ট বিন্দু হইল।

**প্রমাণ :** AO, BO, CO যোগ কর। O বিন্দুতে  $PQ \perp AO$  টান, উহা যেন ABকে Pতে এবং ACকে Qতে ছেদ করিল।  $\therefore AO \perp PQ$ ,  $\therefore A$  হইতে PQ পর্যন্ত অঙ্কিত সরলরেখাগুলির মধ্যে AO ক্ষুদ্রতম। আবার,  $\angle BOP = \angle COQ = 30^\circ$ .  $\therefore BO, CO$  সরলরেখাদ্বয় PQএর সহিত O বিন্দুতে সমান কোণে নত আছে,  $\therefore PQ$ এর উপর O বিন্দুরই B ও C বিন্দু

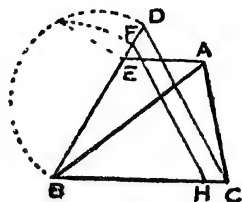
হইতে দূরত্বের সমষ্টি অর্থাৎ  $BO + CO$  ক্ষুদ্রতম (উদা. 1 দেখ)। সুতরাং  $O$  বিন্দুর দূরত্বগুলির সমষ্টি  $AO + BO + CO$  লঘিষ্ঠ হইল।

### সম্পাদিত সম্বন্ধীয় বিবিধ সমাধান

উদা. 1. Draw an equilateral triangle equal in area to a given triangle. [C. U. '39 Suppl. ; '50 (High)]

প্রদত্ত  $\triangle ABC$ , ইহার সমান একটি সমবাহু ত্রিভুজ আঁকিতে হইবে।

অঙ্কন :  $BC$ র উপর  $DBC$  সমবাহু ত্রিভুজ আঁক।  $AE \parallel BC$  টান, উহা  $BD$ কে  $E$  বিন্দুতে ছেদ করিল।  $BD$  হইতে  $BE$  ও  $BD$ র মধ্যসমাত্মপাতীর সমান  $EF$  অংশ কাট।  $FH \parallel DC$  টান, উহা যেন  $BC$ কে  $H$  বিন্দুতে ছেদ করিল।  $\triangle BFH$  উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।



চিত্র নং 16

প্রমাণ :  $\because FH \parallel DC, \therefore \angle BFH = \angle D, \angle BHF = \angle DCB,$   
 $\therefore \triangle BFH$  ও  $\triangle DBC$  সদৃশকোণী,  $\therefore \triangle BFH$  সমবাহু।

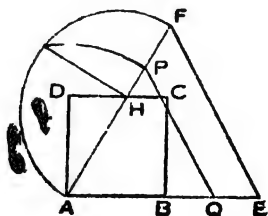
$$\text{একগুণে, } \frac{\triangle BFH}{\triangle DBC} = \frac{BF^2}{BD^2} = \frac{BE \cdot BD}{BD^2} (\because BF \text{ মধ্যসমাত্মপাতী}) = \frac{BE}{BD}.$$

$$\text{আবার, } EC \text{ যোগ করিলে } \frac{\triangle BEC}{\triangle BDC} = \frac{BE}{BD} \therefore \frac{\triangle BFH}{\triangle BDC} = \frac{\triangle BEC}{\triangle BDC}.$$

$\therefore \triangle BFH = \triangle BEC$  ~~কিন্তু~~  $\triangle BCE = \triangle ABC$  (কারণ, উহারা একই ভূমির উপর দুই সমান্তরাল রেখার মধ্যে অবস্থিত),  $\therefore \triangle BFH = \triangle ABC$ .

উদা. 2. Construct an equilateral triangle equal in area to a given square.

প্রদত্ত  $ABCD$  বর্গের  $AB$ কে  $E$  পর্যন্ত বর্ধিত কর, যেন  $BE = AB$  হয়।  $AE$ র উপর  $AEF$  সমবাহু ত্রিভুজ আঁক।  $AF$  যেন  $DC$ কে  $H$  বিন্দুতে ছেদ করিল।  $AF$  হইতে  $AH$  ও  $AF$ -এর মধ্যসমাত্মপাতীর সমান  $AP$  অংশ কাট।  $PQ \parallel FE$  টান, উহা যেন  $AE$ কে  $Q$  বিন্দুতে ছেদ করিল।  $\triangle APQ$  উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।



চিত্র নং 17



## Miscellaneous Exercise

[ Algebra ]

1. Solve  $\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{2x+3} + \sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x+3} - \sqrt{2x-3}}$ .

যোগ ও ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা পাই  $\frac{2\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x-1}} = \frac{2\sqrt{2x+3}}{2\sqrt{2x-3}}$

বা,  $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{2x+3}}{\sqrt{2x-3}}$ , বা,  $\frac{x+1}{x-1} = \frac{2x+3}{2x-3}$  [ বর্গ করিয়া ]

বা,  $2x^2 + x - 3 = 2x^2 - x - 3$ , or,  $2x = 0$ ,  $\therefore x = 0$ .

2. Solve  $\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \frac{1}{2}$ . [B. U.] [Ans.  $x = \frac{5}{4}$ ]

3. Solve  $\frac{\sqrt[3]{2x+3} + \sqrt[3]{x-11}}{\sqrt[3]{2x+3} + \sqrt[3]{x-11}} = 2$ . [Ans.  $x = 12$ ]

[ 1এর দ্বারা সমাধান কর ]

4 Solve :  $y+z=\frac{1}{x}$ ,  $z+x=\frac{1}{y}$ ,  $x+y=\frac{1}{z}$ . [G. U. '49]

সমীকরণ 3টি হইতে পাই  $xy+xz=1 \dots (1)$ ,  $yz+xy=1 \dots (2)$

~~$yz+xz=1 \dots (3)$~~

(1)+(2)+(3) করিয়া পাই  $2(xy+yz+zx)=3$ ,

বা,  $xy+yz+zx=\frac{3}{2} \dots \dots (4)$

এক্ষণে, (4)-(1) করিয়া পাই  $yz=\frac{1}{2} \dots \dots (5)$

(4)-(2)  $\therefore zx=\frac{1}{2} \dots \dots (6)$

(4)-(3)  $\therefore xy=\frac{1}{2} \dots \dots (7)$

বাকী অংশ সহজ...

[ Ans.  $x=y=z=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$  ]

5. Solve :  $x(2x+3y+4z) = 58 \dots \dots (1)$

$y(2x+3y+4z) = 87 \dots \dots (2)$

$z(2x+3y+4z) = 116 \dots \dots (3)$

(1), (2) ও (3) সমীকরণকে যথাক্রমে 2, 3 ও 4 দ্বারা (অর্থাৎ বন্ধনীর  
মধ্যস্থিত  $x, y, z$  এর সহগ দ্বারা) গুণ করিয়া এবং সেই গুণফলগুলি যোগ  
করিয়া পাই  $(2x+3y+4z)^2 = 116+261+464=841=(29)^2$ ,

$$\therefore 2x+3y+4z = \pm 29 \dots\dots (4)$$

এক্ষে, (1), (2) ও (3) কে (4) দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$$x = \pm 2, y = \pm 3, z = \pm 4.$$

6. Solve  $x^y = y^x \dots\dots (1)$ ,  $y^a = x^b \dots\dots (2)$ . [C. U. '58]

(1) হইতে  $x^y = y^x = y$  এবং (2) হইতে  $y = x^{\frac{b}{a}}$

$$\therefore x^y = x^{\frac{b}{a}}, \quad \therefore \frac{y}{x} = \frac{b}{a}, \text{ বা, } y = \frac{bx}{a}$$

এক্ষে, (2)-এ  $y$  এর স্থানে  $\frac{bx}{a}$  বসাইয়া পাই,

$$\left(\frac{bx}{a}\right)^a = x^b, \text{ বা, } \left(\frac{b}{a}\right)^a \times x^a = x^b, \text{ বা, } \left(\frac{b}{a}\right)^a = \frac{x^b}{x^a} = x^{b-a}$$

$$\therefore x = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{a}{b-a}} \quad \therefore y = \frac{bx}{a} = \frac{b}{a} \times \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{a}{b-a}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{1+\frac{a}{b-a}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{b}{b-a}}$$

$$\therefore x = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{a}{b-a}}, y = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{b}{b-a}}.$$

7. Solve  $2^x + 3^y = 17$  and  $2^{x+2} - 3^{y+1} = 5$ . [C. U. '57]

[ Ans.  $x=3, y=2$  ]

8. Solve  $2^{x-1} + 3^{y-1} = 4$  and  $5^{x-2} + 2 \cdot 3^{y-2} = 1$

[ Ans.  $x=1, y=2$  ] [C. U. '58 (C)]

9. Show that the numerical sum of the coefficients of the terms in the expansion of  $(a+b)^8$  is 256

এখানে  $a$  ও  $b$  এর সহগ 1 এবং 1 এর যে-কোন বাতও 1 হয়। অতএব, বিস্তৃতির পদগুলিতে  $a=1$  ও  $b=1$  বসাইলে প্রত্যেক পদ উহার সহগে পরিণত হইবে অর্থাৎ সহগের সমান হইবে। অতএব, নির্ণেয় সহগগুলির যোগফল  $= (1+1)^8 = 2^8 = 256$ .

10. Find the value of  $(2+3\sqrt{-5})^{\frac{1}{2}} + (2-3\sqrt{-5})^{\frac{1}{2}}$ .

[ Ans.  $\pm 3\sqrt{2}$  ] [ Pat. '55 ]



11. If  $ma^3 - 3na^2 + 3pa - q$  be a perfect cube, show that  $n^3 = mp$  and  $n^3 = m^2q$ .

$$\begin{aligned} \text{মনে কর, } ma^3 - 3na^2 + 3pa - q &= (xa - y)^3 \\ &= x^3a^3 - 3x^2ya^2 + 3xy^2a - y^3. \end{aligned}$$

$$\therefore \text{এখানে } m = x^3, n = x^2y, p = xy^2, q = y^3$$

$$\therefore n^2 = x^4y^2 = x^3 \cdot xy^2 = mp \text{ এবং } n^3 = x^6y^3 = m^2q.$$

### [ Trigonometry ]

Prove that :—

$$1. \sqrt{\frac{1+\sin \theta}{1-\sin \theta}} + \sqrt{\frac{1-\sin \theta}{1+\sin \theta}} = 2 \sec \theta.$$

$$\begin{aligned} \text{বামপক্ষ} &= \sqrt{\frac{(1+\sin \theta)^2}{1-\sin^2 \theta}} + \sqrt{\frac{(1-\sin \theta)^2}{1-\sin^2 \theta}} \\ &= \sqrt{\frac{(1+\sin \theta)^2}{\cos^2 \theta}} + \sqrt{\frac{(1-\sin \theta)^2}{\cos^2 \theta}} \\ &= \frac{1+\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{1-\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1+\sin \theta + 1-\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{2}{\cos \theta} = 2 \sec \theta. \end{aligned}$$

$$2. \cos \theta + \frac{\tan \theta \cos \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} = 1 + \sec \theta. \quad [\text{B. U.}]$$

$$3. \frac{\sin A + \sec A}{\cos A + \operatorname{cosec} A} = \tan A. \quad [\text{B.H.U. '45}]$$

$$4. \tan^2 A - \tan^2 B = \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A \cos^2 B}. \quad [\text{C. U. '36}]$$

$$\begin{aligned} \text{বামপক্ষ} &= \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} - \frac{\sin^2 B}{\cos^2 B} = \frac{\sin^2 A \cos^2 B - \sin^2 B \cos^2 A}{\cos^2 A \cos^2 B} \\ &= \frac{\sin^2 A (1 - \sin^2 B) - \sin^2 B (1 - \sin^2 A)}{\cos^2 A \cos^2 B} \\ &= \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A \cos^2 B}. \end{aligned}$$

$$5. \frac{1 + \tan^2 \theta}{1 + \cot^2 \theta} = \left( \frac{1 - \tan \theta}{1 - \cot \theta} \right)^2 \quad [\text{W. B. S. F. '56}]$$

$$6. (\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta)^2 = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \quad [\text{B. H. U. '40}]$$

$$7. \frac{\cot \theta}{\operatorname{cosec} \theta - 1} - \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = 2 \tan \theta.$$

$$8. 1 - \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cot \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha}{1 + \tan \alpha} = \sin \alpha \cos \alpha. \quad [\text{B. H. U. '44}]$$

$$9. \sec^2 \phi \tan \phi + 2 \sec \phi \operatorname{cosec} \phi + \operatorname{cosec}^2 \phi \cot \phi = \sec^3 \phi \operatorname{cosec}^3 \phi \quad [\text{B. H. U. '42}]$$

$$\begin{aligned} \text{বামপক্ষ} &= \frac{1}{\cos^2 \phi} \frac{\sin \phi}{\cos \phi} + \frac{2}{\cos \phi \sin \phi} + \frac{1}{\sin^2 \phi} \frac{\cos \phi}{\sin \phi} \\ &= \frac{\sin^4 \phi + 2 \sin^2 \phi \cos^2 \phi + \cos^4 \phi}{\cos^3 \phi \sin^3 \phi} = \frac{(\sin^2 \phi + \cos^2 \phi)^2}{\cos^3 \phi \sin^3 \phi} \\ &= \frac{1}{\cos^3 \phi \sin^3 \phi} = \sec^3 \phi \operatorname{cosec}^3 \phi \end{aligned}$$

$$10. \frac{\cot \theta - \tan \theta}{\cot \theta + \tan \theta} = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\begin{aligned} 11. \frac{\sin A}{\cos A + \sin B} + \frac{\sin B}{\cos B - \sin A} \\ = \frac{\sin A}{\cos A - \sin B} + \frac{\sin B}{\cos B + \sin A} \end{aligned}$$

$$12. \frac{1 + \sec^2 A \cot^2 B}{1 + \sec^2 C \cot^2 B} = \frac{1 + (\tan A \cos B)^2}{1 + (\tan C \cos B)^2}$$

$$[\text{Hints : বামপক্ষ} = \frac{1 + (1 + \tan^2 A) \cot^2 B}{1 + (1 + \tan^2 C) \cot^2 B}]$$

$$= \frac{1 + \cot^2 B + \tan^2 A \cot^2 B}{1 + \cot^2 B + \tan^2 C \cot^2 B} \dots$$

এর পর  $\tan$  ও  $\cot$  কে  $\frac{\sin}{\cos}$  ও  $\frac{\cos}{\sin}$  এ পরিণত কর। ]

13. If  $x = \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}$ , show that  $\frac{1}{x} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$ .

14. If  $4 \sec^2 \alpha - 7 \tan^2 \alpha = 3$ , prove that  $\sin \alpha = \pm \frac{1}{2}$ .  
[B. H. U. '40]

এখানে  $4 \sec^2 \alpha - 7 \tan^2 \alpha = 3$ ,

বা,  $4(1 + \tan^2 \alpha) - 7 \tan^2 \alpha = 3$ , বা,  $4 - 3 \tan^2 \alpha = 3$ ,

বা,  $3 \tan^2 \alpha = 1$ ,  $\therefore \tan^2 \alpha = \frac{1}{3}$ ,

বা,  $\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{3}$ , বা,  $\frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{1}{3}$ , বা,  $4 \sin^2 \alpha = 1$ ,

বা,  $\sin^2 \alpha = \frac{1}{4}$ ,  $\therefore \sin \alpha = \pm \frac{1}{2}$ .

15. Given  $\sec \theta + \tan \theta = u$ , express  $\tan \theta$  in terms of  $u$ ,  
[Ans.  $\tan \theta = \frac{u^2 - 1}{2u}$ ] [P. U. '42]

16. If  $\tan A + \sin A = a$ , and  $\tan A - \sin A = b$ , then  
 $a^2 - b^2 = 4\sqrt{ab}$ . [B. H. U. '36]

17. If  $\tan A = \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta}$ ,

show that  $\sqrt{2} \sin A = \sin \theta - \cos \theta$

18. If  $x \sin \alpha - y \cos \alpha = z$ , then  $x \cos \alpha + y \sin \alpha$   
 $= \pm \sqrt{x^2 + y^2 - z^2}$ .

[Hints : প্রদত্ত সর্বত্র উভয় পক্ষে বর্গ কর তৎপরে তাহার উভয়  
পক্ষ (1) + (2) যোগ কর]

19. If  $\tan^2 A = 1 + 2 \tan^2 B$ ,  
prove that  $2 \sin^2 A = 1 + \sin^2 B$ .

20. If  $\cos \theta + \sec \theta = 2$ , find the value of  $\cos^n \theta + \sec^n \theta$   
এখানে  $\cos \theta + \sec \theta = 2$ ,

বা,  $\cos \theta + \frac{1}{\cos \theta} = 2$ , বা,  $\cos^2 \theta + 1 = 2 \cos \theta$ ,

বা,  $\cos^2 \theta - 2 \cos \theta + 1 = 0$ , বা,  $(\cos \theta - 1)^2 = 0$ ,  $\therefore \cos \theta = 1$

$\therefore \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = 1$ .

এক্ষেত্রে  $\cos^n \theta + \sec^n \theta = (1)^n + (1)^n = 2$ .

21. If  $\operatorname{cosec} \alpha + \sin \alpha = 2$ , show that  $\sin^7 \alpha + \operatorname{cosec}^7 \alpha = 2$ .  
[W. B. S. F. '60]

22. If  $y \tan A = x$ , find the value of  $\frac{x \sin A - y \cos A}{x \sin A + y \cos A}$ .

$\therefore y \tan A = x, \therefore xy \tan A = x^2$  (  $x$  দ্বারা গুণ করিয়া )

$$\therefore x \tan A = x^2.$$

$$\text{এক্ষেপে, } \frac{x \sin A - y \cos A}{x \sin A + y \cos A} = \frac{x \tan A - y}{x \tan A + y}$$

[ লব ও হরকে  $\cos A$  দিয়া ভাগ করিয়া ]

$$= \frac{x^2 - y}{x^2 + y} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

23. If  $\tan \theta + \cot \theta = 2$ , find  $\sin \theta$ ,  $\theta$  being a positive acute angle.  
[W. B. S. F. '55] [ Ans.  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  ]

24. If  $\tan \theta = 2 \sin \theta$ , where  $\theta$  is a positive acute angle, find  $\cot \theta$ .  
[W. B. S. F. '57] [ Ans.  $\frac{1}{3}$  ]

25. Given  $\tan^2 \theta = 1 - e^2$ , show that  $\sec \theta + \tan^3 \theta \operatorname{cosec} \theta = (2 - e^2)^{\frac{3}{2}}$ .  
[W. B. S. F. '59]

$$\text{এখানে } \sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta = 1 + 1 - e^2 = 2 - e^2,$$

$$\therefore \sec \theta = (2 - e^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \sec \theta + \tan^3 \theta \operatorname{cosec} \theta = \sec \theta + \tan^2 \theta \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \frac{1}{\sin \theta}$$

$$= \sec \theta + \tan^2 \theta \cdot \frac{1}{\cos \theta} = \sec \theta + \tan^2 \theta \sec \theta = \sec \theta (1 + \tan^2 \theta)$$

$$= \sec^3 \theta = \left\{ (2 - e^2)^{\frac{1}{2}} \right\}^3 = (2 - e^2)^{\frac{3}{2}}.$$

26. Find  $\alpha$  and  $\beta$  in degrees ( $\alpha$  and  $\beta$  being positive acute angles), if  $\sin(2\alpha - \beta) = 1$ , and  $\cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}$ .

[W. B. S. F. '59] [Ans.  $\alpha = 50^\circ$ ,  $\beta = 10^\circ$ ]

27. If  $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\alpha$ , prove that  $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \tan^2\theta$ . [W. B. S. F. '60]

$$\therefore \cos^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\alpha, \therefore \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \frac{\tan^2\alpha}{1} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$[\because \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1]$$

$$\therefore \text{Comp. \& div. দ্বারা } \frac{2\cos^2\theta}{-2\sin^2\theta} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$$

$$\text{বা, } \frac{\cos^2\theta}{-\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}, \text{ বা, } \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

$$\text{বা, } \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \tan^2\theta.$$

28. If  $6\sin^2\theta - 11\sin\theta + 4 = 0$ , where  $\theta$  is a positive acute angle, find  $\theta$  in degrees. [Ans.  $30^\circ$ ]

29. If  $\sin^2\theta + \sin^4\theta = 1$ , prove that  $\tan^4\theta - \tan^2\theta = 1$ .

[W. B. S. F. '59 (C)]

30. If  $5 \sin A - 3 \cos A = 4$  find the value of  $\frac{5 \sin A - 3 \cos A}{\sin A + 2 \cos A}$

[W. B. S. F. '60] [Ans.  $\frac{1}{3}$ ]

31. Solve for  $\theta$ , where  $\theta$  is an acute angle :

$$\frac{1 - \tan\theta}{1 + \tan\theta} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

$$\text{যোগ ও ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা পাই } \frac{2}{-2 \tan\theta} = \frac{2\sqrt{3}}{-2}, \text{ বা, } \frac{1}{\tan\theta} = \sqrt{3},$$

$$\text{বা, } \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^\circ, \therefore \theta = 30^\circ.$$

32. Solve  $\tan\alpha + \sqrt{3}\cot\alpha = \sqrt{3} + 1$  where  $\alpha$  is an acute angle. [Ans.  $\alpha = 60^\circ$  or  $45^\circ$ ]

33. The angles of a triangle are in A. P. and the number of degrees in the least is to the number of radians in the greatest as 60 to  $\pi$ . Find the angles in degrees

[ W. B. S. F. '60 ; Ans.  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$  ]

34. Assuming the earth to be a sphere of radius 4000 miles determine approximately the difference in latitude (to be expressed in the sexagesimal system) of two places, one of which lies 200 miles due north of the other.

$$\left(\frac{1}{\pi} = .31831\right) \quad [\text{W. B. S. F. '56}]$$

[ Hint. চাপ =  $r\theta$  ; এখানে চাপ = 200 মাইল,  $r = 4000$  মাইল ।  
 ) নির্ণয় করতে হবে । চাপ =  $r\theta$  হলে  $\theta$  কোণটি  $\theta$  রেডিয়ান ।

$$4000 \times \theta = 200, \quad \therefore \theta = \frac{200}{4000} \text{ রেডিয়ান} = \frac{1}{20} \times \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$= 9^\circ \times \frac{1}{\pi} = 9^\circ \times .31831 = 2^\circ 51' 53.244'' ]$$

35 An arc of  $50^\circ$  in one circle equals one of  $60^\circ$  in another ; find the radian measure of an angle subtended at the centre of the first circle by an arc equal to the radius of the second. [W. B. S. F. '56]

$$50^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ এবং } 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

মনে কর, প্রথমটি A-বৃত্ত এবং উহার ব্যাসার্ধ R, দ্বিতীয়টি B-বৃত্ত এবং উহার ব্যাসার্ধ r.

প্রথম বৃত্তে, চাপ =  $\frac{\pi}{4}R$  এবং দ্বিতীয় বৃত্তে, চাপ =  $\frac{\pi}{3}r$ ,

$$\therefore \frac{\pi}{3}r = \frac{\pi}{4}R. \quad \therefore \frac{r}{R} = \frac{3}{4}$$

এক্ষেপে, প্রথম বৃত্তের চাপের পরিমাণ r হলে নির্ণয় কেন্দ্রস্থ কোণের পরিমাণ =  $\frac{\text{চাপ}}{R}$  রেডিয়ান =  $\frac{r}{R}$  রেডিয়ান =  $\frac{3}{4}$  রেডিয়ান ।

36. The height of a house subtends a right angle at an opposite window, the top of the house being  $60^\circ$  above a horizontal line through the window; find the height of the house, taking the breadth of the street to be 30 ft.

[Ans.  $40\sqrt{3}$  ft.]

37. Two pillars are respectively 180 and 60 feet high. If the angle of elevation of the top of the first from the foot of the second be  $60^\circ$ , what will be the angle of elevation of the top of the second from the foot of the first?

[Ans.  $30^\circ$ ]

38. Show that :—

$$(a) \quad 1 + \tan A + \tan^2 A + \tan^3 A = \frac{\sin A + \cos A}{\cos^3 A}$$

$$(b) \quad 1 + \cot A + \cot^2 A + \cot^3 A = \frac{\sin A + \cos A}{\sin^3 A}$$

$$(c) \quad \sec^6 \theta - \tan^6 \theta = 1 + 3 \sec^2 \theta \tan^2 \theta$$

$$(d) \quad \operatorname{cosec}^6 \theta - \cot^6 \theta = 1 + 3 \operatorname{cosec}^2 \theta \cot^2 \theta.$$

39. If  $\tan \theta + \cot \theta = 2$ , show that  $\tan^7 \theta + \cot^7 \theta = 2$ .

40. If  $p \sin \theta + q \cos \theta = r$  and  $p \cos \theta - q \sin \theta = s$ , then

$$p^2 + q^2 = r^2 + s^2 \quad \text{and} \quad \tan \theta = \frac{r - q \cos \theta}{s + q \sin \theta}.$$

[ Geometry ]

1. PQRS is a parallelogram; A and B are two points outside and are such that AB is parallel to PQ; AP and BQ when produced meet at C and AS and BR when produced meet at D; show that CD is parallel to PS.

2. O is the in-centre of the  $\triangle ABC$  and AO produced meets BC at D. Show that  $AO : OD = (AB + AC) : BC$ .

3. In the quadrilateral ABCD,  $BC = 2AD$ , and O is a point on the diagonal AC such that  $CO = 2AO$ . If  $BO = 2DO$ , prove that ABCD is a trapezium and O lies on the diagonal BD.

4. The adjacent sides of a rectangular land are 20 ft and 8 ft. respectively; calculate geometrically the side of the square whose area will be equal to that of the rectangular plot.

5. Two circles intersect at A and B. Prove that of the triangles having a straight line drawn through A and intercepted by the circumferences as their base and B as their vertex, the area of the triangle whose base is perpendicular to AB is the maximum.

[ চিত্র আঁক ] মনে কর  $PBQ$  ও  $XBV$  এরূপ দুইটি সদৃশ ত্রিভুজ এবং  $PQ \perp AB$ ,  $BR \perp XY$  টান,  $AB > BR$  হইল এবং  $AB$  ও  $BR$  যথাক্রমে  $\triangle PBQ$  ও  $\triangle XBY$ -এর উচ্চতা।

• ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ,  $\therefore$  তাহাদের ক্ষেত্রফলের অনুপাত  $= AB^2 : BR^2$ .

•  $\triangle PBQ > \triangle XBY$  .













